

# 分岐理論および非適合要素を用いた有限要素法による地盤のすべり機構の解明

著者	矢富 盟祥
著者別表示	Yatomi Chikayoshi
雑誌名	平成13(2001)年度 科学研究費補助金 基盤研究(B) 研究成果報告書
巻	1999-2001
ページ	272p.
発行年	2002-03
URL	<a href="http://doi.org/10.24517/00052969">http://doi.org/10.24517/00052969</a>



# 分岐理論および非適合要素を用いた有限要素法 による地盤のすべり機構の解明

(課題番号 11450181)

平成11年度～平成13年度科学研究費補助金（基盤研究（B）（1））  
研究成果報告書

平成14年3月

研究代表者 矢富盟祥

(金沢大学大学院自然科学研究科教授)

金沢大学附属図書館



8011-05247-0

KAKEN  
2001  
5

# 分岐理論および非適合要素を用いた有限要素法 による地盤のすべり機構の解明

(課題番号 11450181)

平成11年度～平成13年度科学研究費補助金（基盤研究（B）（1））  
研究成果報告書

平成14年3月

研究代表者 矢富盟祥

(金沢大学大学院自然科学研究科教授)

著者 寄贈

平成11年度～平成13年度科学研究費補助金（基盤研究（B）（1））  
研究成果報告書

課題番号 11450181

研究課題 分岐理論および非適合要素を用いた有限要素法  
による地盤のすべり機構の解明

研究組織

研究代表者 矢富 盟祥（金沢大学大学院・自然科学研究科・教授）

研究分担者 浅岡 顕（名古屋大学大学院・工学研究科・教授）

研究分担者 田村 武（京都大学大学院・工学研究科・教授）

交付決定額

平成11年度 1,800千円

平成12年度 2,000千円

平成13年度 1,600千円

## はしがき

円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様変形するが最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バジル型、上下非対称バジル型非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

本報告の第1編では、これらの現象を、ある限界荷重を越えると、均一変形が維持できなくなり、不均一な変形へと移行する、すなわち分岐現象とみなし、有限変形を考慮した共軸・非共軸 Cam-clay モデルを例にとり、平面問題や円柱供試体の軸対称変形および非軸対称変形の場合の分岐解析を行いその厳密解を得た。

その結果より、分岐荷重と変形モードの関係を考察を行った。その結果、塑性ひずみ増分と応力の主軸方向が異なる場合の非共軸モデルの場合、圧縮試験の場合は、ほとんど同一の限界荷重で、上記の種々のモードの変形が可能であることが分かった。一方、円柱供試体においては、共軸モデルでは、実際の実験でしばしば見られるバルジ変形を含む一切の不均一変形が存在し得ないことがわかった。この事により、古典的共軸 Cam-clay モデルは、応力の主軸の回転が生じるような現象には不適切で、正規圧密粘土の構成式は何らかの非共軸性を有している必要がある事が判明した。また非共軸モデルの場合の非軸対称分岐解析において、それぞれの場合の最大せん断ひずみ分布により、すべり面の形態の考察を行ったところ、実際の実験で見られるものと非常に良く一致していた。特に円柱供試体において、高次のモードにおいては、せん断ひずみが最大になる箇所が供試体側面近傍で周

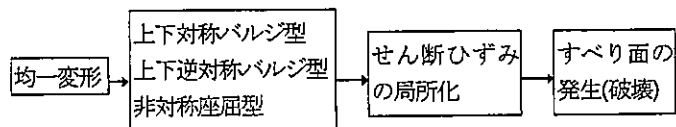
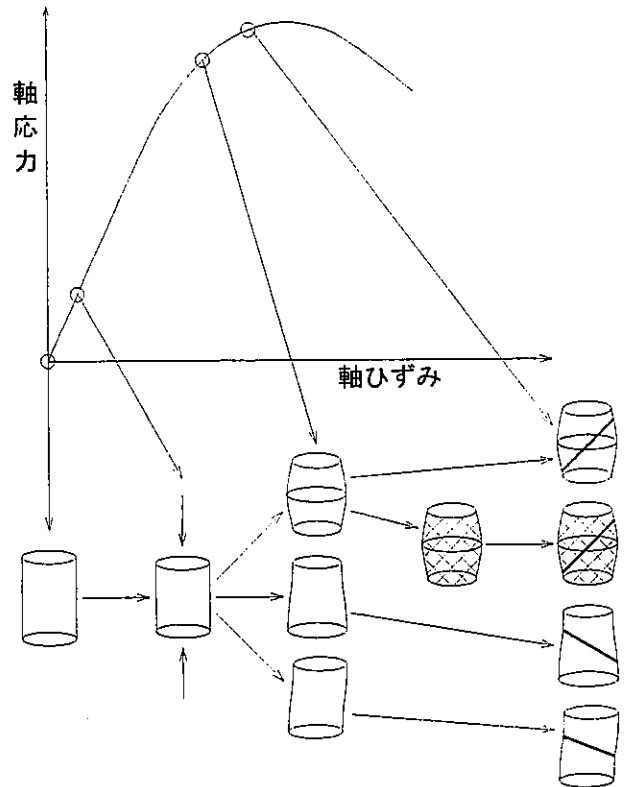


図1 変形特性の遷移過程

期的に存在することから、円柱表面近傍において網目状のすべり面群が発生する可能性があることも解明できた。また、未発表の内容のため、本報告には記載していないが、伸長試験の場合は、圧縮の場合と異なり、上下対称な、くびれモードの場合が最も分岐荷重が小さく、高次のモード変形は生じにくいことが分かった。このことは実際の伸長試験では、圧縮試験の場合と異なり、軸対称くびれ現象のみが生じるという現象を非常に良く説明している。以上の結果から非均一解の発生、すべり面の生成・進展過程を追跡するためには、土質の弾塑性体構成式には非共軸性の導入が不可欠であると考えられる。

本報告の第2編では、板やシェルの有限要素法による解の精度を良くするために、有限要素内に変位の不連続を許す非適合要素を用いたアスームド・エンハンスド法（Assumed Enhanced Method）を応用した方法により、地盤材料を用いた解析を行う基礎的研究として、より簡単な、軟化現象を表せる等方損傷モデルを用いて、要素内に変位の不連続部分が進展する非適合要素を用いた強不連続有限要素法解析を行った。その結果、物体全体の挙動である、荷重－荷重点変位関係が、有限要素法のメッシュの大きさや配置などに依存しない事、および要素内に変位の不連続性を組み込むために必要 Dirac のデルタ関数を近似するためのパラメーターの大きさにも依存しない事が確認できた。強不連続解析は、最近類似の解析手法がいくつか発表され、非常に興味ある解析手法であるが、現在まで、1次元に場合を除き、理論解が得られない事もあり、それらの解析手法の精度検証に関する研究は、皆無であった。興味ある解析手法であっても、精度が良くなければ、工学的に無意味である。そこで、上記のような軟化モデルにおいては、構成式として、変位の不連続面が進展する際に必要なエネルギー、すなわち破壊エネルギーが与えられているので、これを、エネルギー解放率を求めるための、経路独立な積分である破壊力学では周知の、1968年に J. Rice や J. Eshelby によって提案された J 積分と、研究代表者が1983年に発表した E 積分を用いて解析する事により、その両者の値が一致するかどうかを検討した。その結果、E 積分の方が、周知の J 積分より経路独立性に関して優れている事が分かり、また、その時、得られたの E 積分の値が、破壊エネルギーに非常に良く一致していた事から、本モデルにおける要素内に変位の不連続性を組み込んだ強不連続有限要素解析は、非常に良い精度で得られている事が確認できた。この結果より、地盤のすべり機構の解明のため、要素内に変位の不連続部分が進展する非適合要素を用いた強不連続解析を、Cam-clay モデルのような弾塑性体に適用した場合への有用性が確認出来た。

地盤中にすべり面が生成・進展する進行性破壊現象を解析しようとする、そのすべり面内の構成関係が軟化状態となり、地盤全体が不安定挙動をとるようになる。このような現象を、従来の陽解法による有限要素法で計算すると、時間幅をいくら小さく取っても、計算時間が膨大になり、解が収束しなくなるなどの不都合が生じる。そこで、本報告の第3編の発表論文「陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土／水連成有限要素法解析」において、軟化状態も考慮できる共軸 Cam-clay モデルを用いて、計算時間も早く、すべり面近傍の局所的軟化や地盤全体が不安定状態になっても、解が絶対収束する事が保証され

ていて、精度よく応力が降伏面にのるリターンマップ手法を用いた陰解法による有限要素法解析の開発を行った。その際、計算時間と精度向上のために離散化された全体の非線形連立方程式を解く際、ニュートン・ラフソン法を使用する必要があるが、その場合のアルゴリズム上の剛性マトリクスとして、理論式で与えられている塑性構成テンソルを用いると、ニュートン・ラフソン法の2次収束性が失われるため、アルゴリズム上でのニュートン・ラフソン法に整合させた共軸Cam-clayモデルのコンシステント弾塑性構成テンソルを求めた。なお、従来の陽解法においても、弾塑性状態では、つねに降伏関数に応力状態がのるように、種々のリターンマップ手法が考えられるので、そのようないくつかのリターンマップ法を考慮した陽解法によるプログラムも作成し、本陰解法との精度などの比較検討も試みた。

このリターンマップ手法を用いた陰解法による有限要素法解析と第2編の有限要素内に変位の不連続を許す非適合要素を用いた研究成果を適用する事により、地盤のすべりの発生・進展過程から最終的な崩壊にいたるまでの過程を統一的かつ連続的に追跡する事が出来る有限要素法の開発が可能であると考えている。

本研究の遂行にあたっては、研究分分担者である、浅岡 顕（名古屋大学大学院・工学研究科・教授）田村 武（京都大学大学院・工学研究科・教授）両先生には、研究内容に関する貴重なご意見を頂いた。また本研究の公表に際し、特にご助力を賜った方々の芳名をあげ深甚謝意を表します。

五大開発株式会社代表取締役社長	石川 通 氏
五大開発株式会社代表取締役	小田 兼雄 氏
五大開発株式会社技術本部部長	小島 義孝 氏
五大開発株式会社応用工学研究所主任	鱸 洋一 氏
島根大学総合理工学地球資源環境学科助手	志比 利秀 先生
金沢大学大学院自然科学研究科後期課程学生	杉本 環 氏
福井工業高等専門学校環境都市工学科助教授	阿部 孝弘 先生
徳山工業高等専門学校土木建設工学科助教授	橋本 堅一 先生
徳山工業高等専門学校土木建設工学科助手	島袋 淳 先生
名古屋大学大学院工学研究科助教授	中野 正樹 先生
名古屋大学大学院工学研究科助教授	野田 利弘 先生
東洋建設株式会社鳴尾研究所所長	三宅 達夫 氏
東洋建設株式会社	加藤 大寛 氏

## 研究発表

### (1) 学会誌等

- 1) 阿部孝弘, 矢富盟祥, 橋本堅一, 山本将司:  
エネルギー解放率破壊規準による長さの異なる平行き裂の進展挙動について,  
材料, (2002). (印刷中)
- 2) 杉本環, 矢富盟祥, 鱈洋一:  
不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析の精度検証に関する研究,  
材料, (2002). (印刷中)
- 3) 阿部孝弘, 矢富盟祥, 鱈洋一, 辻野和彦:  
圧縮混合モード荷重下における脆性材料のき裂進展挙動,  
材料, (2002) (印刷中)
- 4) 矢富盟祥, 鱈洋一:  
陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析,  
応用力学論文集, Vol.4, pp.345-356, (2001).
- 5) 中野正樹, 野田利弘, 高木健次: 泥岩粒の粘土化が原因となる飽和した泥岩碎石  
集合体の時間依存的力学挙動, 地盤工学会論文報告集, Vol.41, No.2, pp.143-151,  
(2001).
- 6) 志比利秀, 矢富盟祥, 亀井健史: 平面ひずみ非排水圧縮条件下における供試体寸法の  
変化が正規圧密粘土の分岐荷重に及ぼす影響, 土木学会論文集, No.666/III, pp.181-192,  
(2000).
- 7) 鱈洋一, 矢富盟祥: 圧縮荷重下におけるモードII型き裂進展に関する破壊力学的考察,  
応用力学論文集, Vol.3, pp.25-35, (2000).
- 8) 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥: 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する  
研究, 応用力学論文集, Vol.3, pp.351-362, (2000).
- 9) 橋本堅一, 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥: 鉄筋コンクリート梁部材内のき裂の変形お  
よび進展挙動に関する研究, 構造工学論文集 Vol.46A, pp.299-308, (2000).
- 10) 矢富盟祥: 連続体力学のエッセンスーその芽生えから非線形連続体力学の確立までー,  
土木学会誌 8月号, pp.21-26, (2000).
- 11) T.Noda, G.S.K.Fernando, and A.Asaoka: Delayed Failure in Soft Clay Foundations,  
Soil and Foundations .Vol.40, No.1, pp.85-97 (2000).
- 12) A.Asaoka, M.Nakano and T.Noda: Superloading Yield Surface Concept for Highly Structure  
Soil Behavior, Soil and Foundations, Vol.40, No.2, pp.99-110(2000).
- 13) A.Asaoka, M.Nakano and T.Noda: Delayed Compression/Consolidation Clay due to  
Degradation of soil Structure, Soil and Foundations, Vol.40, No.3. pp.75-85(2000).
- 14) 山田辰夫, 田村 武: 粒状体の剛塑性極限解析とその支持力問題への応用:  
応用力学論文集, Vol.3, pp.489-496(2000).



- 15) 小西真治, 辻 鉄也, 田村 武: 剛塑性有限要素法の切羽安定問題への適用, トンネルと地下, 土木工学社, pp.45-51(2000).
- 16) 小西真治, 朝倉俊弘, 田村 武, 辻鉄也: 粘性土層が介在する砂地盤の切羽安定評価について, 土木学会論文集, No.659/III-52, p p. 51-62 (2000) .
- 17) 田村 武, 足立紀昭, 小西真治, 辻鉄也: 剛塑性有限要素法によるトンネル切羽の安定性評価について, 土木学会論文集, No.638/III-49, pp. 301-310(1999)
- 18) Y.Katoh, M.Miyake, M.Wada, C.Yatomi, and Y.Suzuki: Ground Deformation Mechanism around a Shield Tunnel by the Passage of the Tail Void, Proc. of the Second International Symposium on Pre-Failure Deformation Characteristics of Geomaterials-IS Torino 99, Torino, Italy, pp.725-730, (1999).
- 19) 橋本堅一, 島袋淳, 鱈洋一, 矢富盟祥: 空隙の干渉を受ける破壊き裂の進展特性に関する研究, 破壊力学シンポジウム論文集, Vol.10, pp.121-126, (1999) .
- 20) 志比利秀, 矢富盟祥: Cam-Clay モデルを用いた 2 層弾塑性体の分岐解析, 応用力学論文集, Vol.2, pp.371-382, (1999) .
- 21) 橋本堅一, 鱈 洋一, 矢富盟祥: 鉄筋コンクリート梁内のき裂の進展挙動と破壊モードに関する研究, 応用力学論文集, Vol.2, pp.21-28, (1999).
- 22) 矢富盟祥, 鱈洋一: 圧縮荷重下にある進展き裂の E 積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 土木学会論文集, No.612, I-46, pp.251-263, (1999)
- 23) 橋本堅一, 島袋淳, 矢富盟祥, 鱈洋一: 圧縮荷重下にある 3 次元材料内き裂からの破壊き裂進展に関する実験的検討, 破壊力学シンポジウム論文集, Vol.10, pp.97-101, (1999) .
- 24) C.Yatomi, and K.Hashimoto: On the Energy Release Rate by the Path-Independent E-integral and J-integral for Quasi-Static Crack Growth, in ' Theoretical Studies on Fracture Mechanics in Japan' edited by K.Ohtsuka, Hiroshima-Denki Institute of Technology, pp.87-98, (1998).
- 25) 阿部孝弘, 橋本堅一, 矢富盟祥: 片側き裂先端近傍に平行干渉き裂が存在する場合のエネルギー解放率によるき裂進展挙動の考察, 日本機会学会論文集, Vol.64, No.623, A, pp.85-90, (1998).
- 26) 鱈 洋一, 矢富盟祥: 荷重履歴に伴う摩擦力が存在する進展き裂の E 積分の有限要素解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.45-53, (1998).
- 27) 阿部孝弘, 矢富盟祥, 橋本堅一: 主き裂の進展が抑制される位置関係における平行干渉き裂の進展挙動について, 応用力学論文集, Vol.1, pp.55-63, (1998).
- 28) 志比利秀, 矢富盟祥: 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析, 応用力学論文集, Vol.1, pp.537-546, (1998).
- 29) 阿部孝弘, 矢富盟祥, 橋本堅一: 主き裂先端近傍に平行干渉き裂が存在する場合の E 積分によるエネルギー解放率の数値解析, 材料, Vol.47, No.10, pp.1059-1064 (1998).
- 30) C.Yatomi: Conditions for the Localization of Deformation in Finite Elastic-Plastic Deformations, Proc. of the 4 th International Workshop on Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks, Gifu, Japan, pp.209-218, (1998).

## (2) 主な口頭発表

- 1) 矢富盟祥, 鱈 洋一: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析, 第4回応用力学シンポジウム, Vol.4, pp.345-356, (2001).
- 2) 鱈洋一, 矢富盟祥: 圧縮荷重下におけるモードII型き裂進展に関する破壊力学的考察, 第3回応用力学シンポジウム, Vol.3, pp.25-35, (2000) .
- 3) 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥: 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究, 第3回応用力学シンポジウム, Vol.3, pp.351-362, (2000)
- 4) 橋本堅一, 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥: 鉄筋コンクリート梁部材内のき裂の変形および進展挙動に関する研究, 第46回構造工学シンポジウム, Vol.46A, pp.299-308, (2000) .
- 5) 山田辰夫, 田村 武: 粒状体の剛塑性極限解析とその支持力問題への応用: 第3回応用力学シンポジウム, Vol.3, pp.489-496(2000).
- 6) 橋本堅一, 島袋淳, 鱈洋一, 矢富盟祥: 空隙の干渉を受ける破壊き裂の進展特性に関する研究, 第10回破壊力学シンポジウム, Vol.10, pp.121-126, (1999) .
- 7) 志比利秀, 矢富盟祥: Cam-Clay モデルを用いた2層弾塑性体の分岐解析, 第2回応用力学シンポジウム, Vol.2 pp.371-382, (1999) .
- 8) 橋本堅一, 鱈 洋一, 矢富盟祥: 鉄筋コンクリート梁内のき裂の進展挙動と破壊モードに関する研究, 第2回応用力学シンポジウム, Vol.2, pp.21-28, (1999).
- 9) 橋本堅一, 島袋淳, 矢富盟祥, 鱈洋一: 圧縮荷重下にある3次元材料内き裂からの破壊き裂進展に関する実験的検討, 第10回破壊力学シンポジウム, Vol.10, pp.97-101, (1999) .
- 10) 鱈 洋一, 矢富盟祥: 荷重履歴に伴う摩擦力が存在する進展き裂のE積分の有限要素解析, 第1回応用力学シンポジウム, Vol.1, pp.45-53, (1998).
- 11) 阿部孝弘, 矢富盟祥, 橋本堅一: 主き裂の進展が抑制される位置関係における平行干渉き裂の進展挙動について, 第1回応用力学シンポジウム, Vol.1, pp.55-63, (1998).
- 12) 志比利秀, 矢富盟祥: 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析, 第1回応用力学シンポジウム, Vol.1, pp.537-546, (1998).

## 目次

### 第1編 有限変形弾塑性理論による地盤材料の分岐現象およびすべり面形態の考察

#### 第1章 序論

1. 1 本論文の目的	1
1. 2 本論文の構成	1

#### 第2章 分岐解析のための諸準備

2. 1 概説	3
2. 2 連続体力学の基礎理論	4
2. 3 力学の基本法則	9
2. 4 構成式に関する基本法則	15
2. 5 速度型の運動方程式	18
2. 6 有限変形非共軸 Cam-clay モデル	20
2. 7 分岐の理論	26
2. 8 結論	33

参考文献	34
------	----

#### 第3章 側水圧一定および平面ひずみ条件下における分岐解析

3. 1 概説	35
3. 2 分岐条件式	36
3. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比	47
3. 4 最大せん断ひずみとすべり線の発生位置に関する考察	50
3. 5 結論	54

参考文献	55
------	----

#### 第4章 円柱供試体の軸対称分岐解析

4. 1 概説	56
4. 2 分岐条件式	57
4. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比	68
4. 4 最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察	70
4. 5 結論	73

参考文献	74
------	----

#### 第5章 円柱供試体の非軸対称分岐解析

5. 1	概説	75
5. 2	分岐条件式	76
5. 3	分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比	88
5. 4	最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察	90
5. 5	結論	93
	参考文献	94

## 第6章 中空円柱供試体の分岐解析

6. 1	概説	95
6. 2	分岐条件式	96
6. 3	分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比	109
6. 4	最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察	112
6. 5	結論	115
	参考文献	116

第7章	結論	117
-----	----	-----

Appendix		119
----------	--	-----

## 第2編 要素内部に変位の不連続性をもった強不連続有限要素解析に関する研究

1.	序論	
1.1	本論文の目的	141
1.2	本論文の内容	141
2.	固体力学の基礎	
2.1	表記法	143
2.2	運動と変形	145
2.3	力学の基本法則	149
2.4	弾性体	154
3.	初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法	
3.1	基礎理論	158
3.2	有限要素法への適用	164
4.	強不連続解析の基礎理論	

4.1	強不連続解析概要	173
4.2	強不連続解析の変分原理による弱形式化	176
4.3	有限要素離散化	177
4.4	強不連続解析の分類化	180
4.5	2次元の場合の各手法	182
4.6	各手法の比較検討	189
5.	強不連続解析の具体的な定式化	
5.1	基礎理論	195
5.2	有限要素定式化	211
6.	経路独立積分	
6.1	J 積分	227
6.2	E 積分	231
7.	数値解析	
7.1	要素分割不依存性の検証	235
7.2	要素内部の不連続面の幅の不依存性の検証	238
7.3	経路独立積分を用いたエネルギー解放率の精度検証 による強不連続解析の考察	240
8.	結論	249
	参考文献	251
	補遺	254
	第3編 発表論文	

## 第 1 編

有限変形弾塑性理論による地盤材料の分岐現象  
およびすべり面形態の考察

## 第1章 序論

### 1. 1 本論文の目的

円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

このような様々な不均一な変形が現れるのは、供試体そのものの欠陥や試験装置の不備、あるいは人為的な誤りの可能性も考えられるが、これらをすべて取り去ったとしてもこれらの不均一な変形は避けようのないものと考えられる。この現象を、分岐解析を行うことによって説明しようというのが本論文の目的の一つである。

また、粘土供試体が破壊に至るとき様々な破壊形態をとる。その破壊形態は破壊前の不均一な変形や供試体の形状からの影響が大きいと思われる。分岐解析の結果から供試体内の相対的な最大せん断ひずみの分布を求め、その結果から供試体に発生するすべり面の発生位置やその形状を推測することも本論文の目的である。

### 1. 2 本論文の構成

本論文は序論を含め全7章からなる。

第2章ではまず、分岐解析を行うために有限変形場での連続体力学の基礎理論を解説する。次いで本論文で取り扱う共軸 Cam-clay モデル、非共軸 Cam-clay モデルについて詳しく解説する。最後に分岐の理論を解説し、分岐方程式を定式化する。

第3章では、平面ひずみ条件のもとで、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた長方形供試体に側面に一定水圧を与えて、端面摩擦なし、軸方向に一定速度で圧縮および伸張した場合の分岐解析を行い、その理論解を誘導する。また最大せん断ひずみの分布からすべり面の発生位置およびその形状を予測する。

第4章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた円柱供試体の変形を軸対称変形に限定し、側水圧一定条件の下で、端面摩擦なし、軸方向に一定速度で圧縮および伸張した場合の分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。また最大せん断ひずみの分布からすべり面の発生位置およびその形状を予測する。

第5章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた円柱供試体を側水圧一定条件の下で端面摩擦なし、軸方向に一定速度で圧縮した場合の非軸対称分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。また最大せん断ひずみの分布からすべり面の発

生位置およびその形状を予測する。

第6章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた中空円柱供試体を側水圧一定条件の下で軸方向に一定速度で圧縮した場合の非軸対称分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。また最大せん断ひずみの分布からすべり面の発生位置およびその形状を予測する。

第7章は結論である。



## 第2章 分岐解析のための諸準備

### 2. 1 概説

物質に外力が加わると、物質はニュートンの運動則に従い、物質特性の違いに応じ、初期には準静的にあるいは動的に安定な比較的均一な変形挙動をする。解の一意性がなくなると別の安定な解へ移行し、物質境界、構成式あるいは変形場に何らかの不均一性が存在すると、そこに局所的な変形の乱れ、ないしは集中が生じる。流体では層流から乱流へ、固体では弾性変形から塑性変形、ひずみの局所化そしてついには変位の不連続が生じ、破壊へといたる。それらの一連の遷移過程を連続体力学の範疇で統一的に解明しようとする研究が最近のコンピュータの発達にともなって活発に行われるようになってきている<sup>1) 2) 3)</sup>。

本論文では着目する物体を連続体としてとらえ、有限変形論を用いて物体の変形が均一変形から解の一意性を失い分岐という現象をともなって非均一変形へと遷移する過程を追おうとするものである。そこで本章では、連続体を取り扱うため最初に連続体力学の基礎理論を説明する。また、有限変形論を用いて分岐解析を行うことから、応力や変形の記述、諸量の定義などを重点的に説明する。次いで有限変形場での弾塑性構成式として、本章以降において用いる非共軸項<sup>4)</sup>を導入した、非共軸 Cam-clay モデル<sup>5)</sup>について述べる。最後に一般的な分岐の理論と Hill によって与えられた唯一性の十分条件<sup>6)</sup>を説明し、弾塑性体のような非線型固体における分岐の理論を説明する。また、第3章以降で用いる境界値問題としての分岐方程式を誘導する。

## 2. 2 連続体力学の基礎理論<sup>7) 8)</sup>

### 2. 2. 1 配置と運動

連続体力学では，物体 $B$ は物質を理想化した粒子（物質点と呼ぶ） $X$ の連続的な集合としてとらえ，物体 $B$ がある時刻に空間で占める領域を配置という．

物体 $B$ が力学的作用を受けると配置が変形する．この変形を記述するため，ある特定の時刻 $t=t_0$ の配置 $\kappa$ （普通，物体が初期時刻 $t=0$ で占める領域と考えてよい）を採用して基準配置とし，そのときの物質点 $X$ の位置ベクトルを $\mathbf{X}$ と表わす．

一般に物体 $B$ は時間 $t$ の経過とともに空間中を移動する．物質点 $X$ の時刻 $t=t$ での位置ベクトル $\mathbf{x}$ は，

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

で与えられる．この式は物質点 $X$ に注目して，それが時間と共にどのように動くかを表現している．このことを物体 $B$ の運動といい，時刻 $t=t$ のとき物体 $B$ の占める領域のことを基準配置に対して現配置という．一方，時刻 $t=t$ で位置 $\mathbf{x}$ を占める物質点ということで，特定の物質点を指定することができる．この事は式（2.1）の逆関係

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

が一意に存在することをに対応している．

また，変位 $\mathbf{u}$ は $\mathbf{X}$ と $\mathbf{x}$ を用いて次のように表される．

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

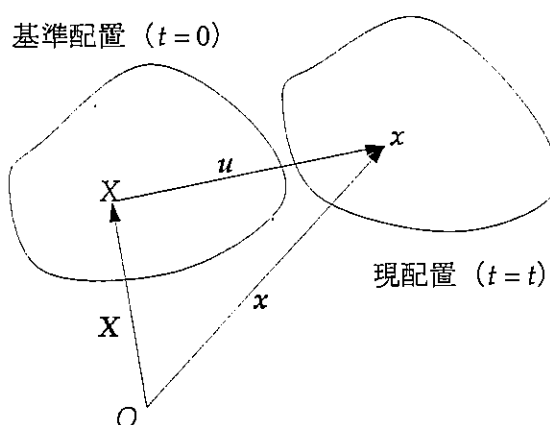


図 2.1 物体の運動と配置

### 2. 2. 2 変形勾配と変形テンソル

物質点  $X$  の近傍の変形を考える. 基準配置において充分近い距離にある 2 つの物質点  $X$ ,  $X + dX$  が現配置においてそれぞれ  $x$ ,  $x + dx$  に移動したとする.  $|dX|$  が微小であるから  $|dX|$  の 2 次以上を省略すると,  $dx$  は,

$$dx = \hat{x}(X + dX, t) - \hat{x}(X, t) = FdX, \quad dx_i = F_{ij}dX_j \quad (2.4)$$

となる. ここで,

$$F \equiv \frac{\partial x}{\partial X}, \quad F_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.5)$$

は変形勾配と呼ばれ, 物質点  $X$  の近傍の基準配置と現配置の相対的変形を表わしている.

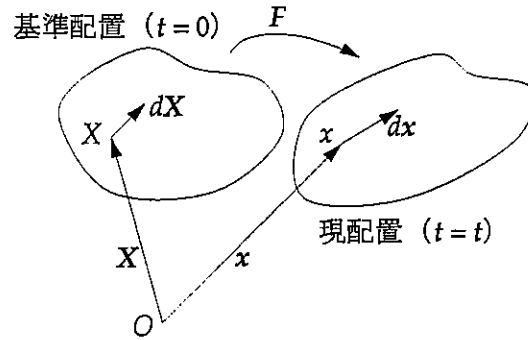


図 2.2 変形勾配テンソル

また, 変形勾配の行列式

$$J = \det F \quad (2.6)$$

は基準配置と現配置での物質点  $X$  近傍の局所的体積比を与える. この事は, 図 2.3 に示すように, 基準配置で  $dX_1$ ,  $dX_2$ ,  $dX_3$  を 3 辺とするような体積  $dV$  の微小平行六面体が, 現配置において  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$  を 3 辺とするような体積  $dv$  の微小平行六面体に変形するとき,

$$\begin{aligned}
dv &= [dx_1, dx_2, dx_3] \\
&= [FdX_1, FdX_2, FdX_3] \\
&= \frac{[FdX_1, FdX_2, FdX_3]}{[dX_1, dX_2, dX_3]} [dX_1, dX_2, dX_3] \\
&= \det F dV \\
&= J dV
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となることから簡単に示される．ここで，有限体積部分の体積が変形後に零にならないとすると， $F$  は  $\det F \neq 0$  であることが要求される．また，変形の途中で物体の一部が，局所的に外と内と入れ替わるようなことがないとすれば， $F$  は  $\det F > 0$  となる非特異なテンソルとなる．以下では非特異な運動だけを考える．この事は式 (2.3) の逆関係

$$dX = F^{-1} dx \tag{2.8}$$

が一意に存在することに対応している．

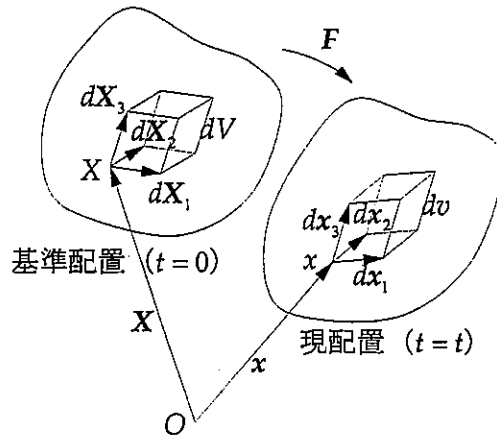


図 2.3 変形前と変形後の体積

このとき，変形勾配  $F$  は，

$$F = RU = VR \tag{2.9}$$

と対称テンソルと直交テンソルの積の形に一意的に分解される．ここで， $R$  は直交テンソルであり，剛体回転を表わす．また， $U$  および  $V$  は正定値対称テンソルであり，右および左ストレッチテンソルと呼ばれ，それぞれの主軸方向への単位長さあたりの伸びを表わす．この事は  $u_a$  および  $v_a$  ( $a=1,2,3$ ) をそれぞれ  $U$ ， $V$  の主軸ベクトル， $\lambda_a$  ( $a=1,2,3$ ) をそれぞれの主値とすると，スペクトル表現定理により， $F$ ， $R$ ， $U$ ，および  $V$  は次のように表

現できることから説明できる.

$$F = \sum_{a=1}^3 \lambda_a v_a \otimes u_a, \quad R = \sum_{a=1}^3 v_a \otimes u_a, \quad U = \sum_{a=1}^3 \lambda_a u_a \otimes u_a, \quad V = \sum_{a=1}^3 \lambda_a v_a \otimes v_a \quad (2.10)$$

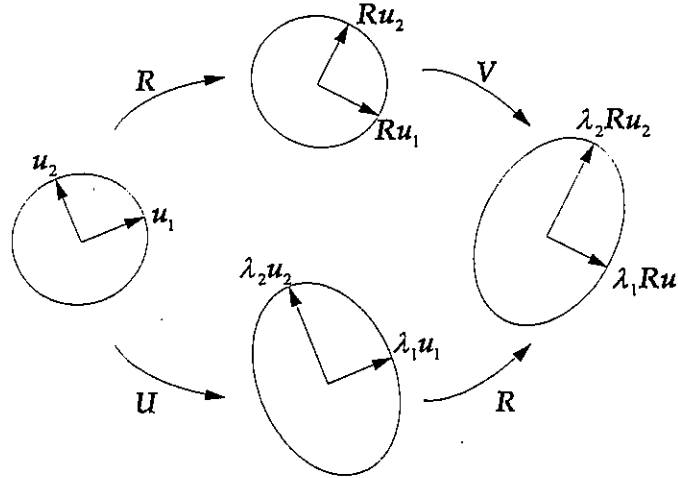


図 2.4 変形勾配の極分解

変形勾配  $F$  が与えられたとき,  $R$ ,  $U$ , および  $V$  を直接求めるのは面倒なため,

$$C = F^T F = U^2 = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 u_a \otimes u_a, \quad B = F F^T = V^2 = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^2 v_a \otimes v_a \quad (2.11)$$

が, よく用いられる.  $C$ ,  $B$  を右および左 Cauchy-Green テンソルという. 現配置が基準配置に一致している無変形状態では,  $F = R = U = V = C = B = I$  である.

物体中に考えた隣接する 2 つの物質点間の距離の変形による変化量を考える. 図 2.2 において, 物質点  $X$  と  $X + dX$  の距離  $dS$  の 2 乗は次式で与えられる.

$$dS^2 = dX \cdot dX \quad (2.12)$$

変形後に物質点  $X$  と  $X + dX$  が移動した先,  $x$  と  $x + dx$  の距離  $ds$  の 2 乗は同様に次式で与えられる.

$$ds^2 = dx \cdot dx \quad (2.13)$$

ここで, 式 (2.4) および式 (2.11) の関係を式 (2.13) に用いると,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= FdX \cdot FdX \\
&= F^T F dX \cdot dX \\
&= CdX \cdot dX
\end{aligned} \tag{2.14}$$

となり，変形による物質点  $X$  と  $X+dX$  の距離の 2 乗の変化量は式 (2.12) と式 (2.14) から次式で与えられる．

$$ds^2 - dS^2 = (C - I)dX \cdot dX = 2EdX \cdot dX \tag{2.15}$$

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \tag{2.16}$$

また， $E$  を Green のひずみテンソルと呼ぶ．現配置と基準配置が一致している無変形状態では  $E=0$  となる．

## 2. 2. 3 変形速度

物質点の速度は，物質点を固定した時間による偏微分（物質時間微分）を“ $\cdot$ ”で表すと， $\dot{x}$  と表すことができるから，局所的な変形速度は式 (2.4) より，

$$d\dot{x} = \dot{F}dX \tag{2.17}$$

と表すことができる．また，式 (2.17) に式 (2.8) を用いると，

$$d\dot{x} = \dot{F}F^{-1}dx = Ldx \tag{2.18}$$

とも表すことができる．ここで， $L$  は速度勾配と呼ばれる．

速度勾配  $L$  は次のように対称部分と反対称部分に分解することができる．

$$L = D + W \tag{2.19}$$

$$D = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad W = \frac{1}{2}(L - L^T) \tag{2.20}$$

対称部分である  $D$  はストレッチングと呼ばれ，その主軸方向への主値に相当する単位長さ当りの伸び速度を与える．一方反対称部分である  $W$  はスピンと呼ばれ， $D$  の主軸の回転速度を与えている．

## 2. 3 力学の基本法則

### 2. 3. 1 質量保存の法則

2.2 節において物体  $B$  を粒子（物質点）の連続的集合と定義した。また、物体には正值の質量が連続的に分布すると考えるなら、質量の凝集した質点という概念は成り立たない。時刻  $t$  における配置での単位体積当りの質量を位置  $x$  および  $t$  の関数として  $\rho(x, t)$  と書き密度と呼ぶ。領域  $D_t$  の質量は次のようになる。

$$m(D_t) = \int_{D_t} \rho(x, t) dv \quad (2.21)$$

また、基準配置での単位体積当りの質量を  $\rho_0(X)$  と書き基準密度と呼ぶ。領域  $D_t$  が基準配置で領域  $D_0$  を占めるとすると、質量保存則の積分形は次式で表される。

$$\int_{D_t} \rho(x, t) dv = \int_{D_0} \rho_0(X) dV \quad (2.22)$$

式 (2.22) において、式 (2.1) と式 (2.7) を用いれば、

$$\int_{D_0} \{\rho(\hat{x}(X, t), t)J(X, t) - \rho_0(X)\} dV = 0 \quad (2.23)$$

と表すこともできる。質量保存則は物体内の任意の領域で成り立つから質量保存則の局所形が次のように表現できる。

$$\rho(\hat{x}(X, t), t)J(X, t) - \rho_0(X) = 0 \quad (2.24)$$

質量保存則は領域  $D$  の質量が時間によらず一定 ( $\dot{m} = 0$ ) と考えることもでき、その場合、質量保存則の局所形は次式のようにも表現できる。

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr} D = 0 \quad (2.25)$$

また、質量保存則が成立する時には、一般に次式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{D_t} \rho f dv \right) = \int_{D_t} \rho \dot{f} dv \quad (2.26)$$

ここで、 $f$  は  $(x, t)$  の任意のなめらかな関数である。

### 2. 3. 2 Cauchy の表面力と Cauchy 応力

図 2.5 に示すように時刻  $t$  において連続体中の点  $x$  を通る曲面  $s$  を考え、 $x$  における単位法線ベクトルを  $n$  とする。  $x$  まわりの微小面素  $a$  を通して  $n$  の向いている側の連続体が、  $-n$  の向いている側の連続体に及ぼす合力を  $P$  とする。  $a$  の面積を  $|a|$  と書き、

$$t(x, n) = \lim_{|a| \rightarrow 0} \frac{P}{|a|} \quad (2.27)$$

が存在すれば、これを Cauchy の表面力と呼ぶ。  $t$  は  $(x, n)$  のみの関数であり  $s$  の曲率によらない。

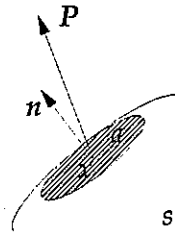


図 2.5 Cauchy 応力

領域  $D$  として特に  $n+1$  個の平面  $S, S_1, S_2, \dots, S_n$  で囲まれた多面体を考える。領域  $D$  について運動量保存則を考え、物体力、加速度が有界であるなら体積積分および面積積分の項は、それぞれ、領域  $D$  の代表長の 3 次および 2 次の量であるから、領域  $D$  を相似的に  $x$  に収束させるなら、体積積分の項は面積積分の項に比較して無視できる。この時、 $S, S_i$  の面積を  $|S|, |S_i|$  と書くなら、次式を得る。

$$t = - \sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} t_i \quad (2.28)$$

ここで、 $t, t_i$  は  $S, S_i$  に作用する表面力である。また、 $S, S_i$  の外向き単位法線ベクトルを  $n, n_i$  とすると Gauss の発散定理より次式を得る。

$$n = - \sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} n_i \quad (2.29)$$

ここで、 $t = t(x, n)$ 、 $t_i = t(x, n_i)$  であるから、式 (2.28) と式 (2.29) より、



$$t(x, -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} n_i) = -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} t(x, n_i) \quad (2.30)$$

となる。ゆえに  $t(x, n)$  は  $n$  に関して線型であり，あるテンソル  $T(x)$  が存在し，  $t(x, n)$  は，

$$t(x, n) = T(x)n \quad (2.31)$$

と書ける。  $T(x)$  を Cauchy 応力と呼び，式 (2.31) を Cauchy の式という。また，以上の応力の存在を指して応力原理という。

Cauchy 応力  $T$  は後で式 (2.41) で示すように対称であるので，固有方程式

$$Tn = \sigma n \quad (2.32)$$

は 3 つの固有値  $\sigma_i$  とそれぞれに対応した 3 つの固有ベクトル  $n_i$  を有する。この物理的意味は面  $n_i$  での Cauchy の表面力は  $n_i$  の方向を向くということである。すなわちこの面にはせん断力は働かず，その大きさは  $\sigma_i$  であるということである。  $\sigma_i$  のことを主応力といい，  $n_i$  のことを主方向と呼ぶ。また，  $n_i$  はそれぞれ直交する。

また，一般に 2 階のテンソル  $T$  の不変量は次式で定義される。

$$I_T = \text{tr } T, \quad II_T = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 T - \text{tr } T^2), \quad III_T = \det T \quad (2.33)$$

特に  $T$  が Cauchy 応力するとき，これらを応力の不変量という。応力  $T$  の成分は座標の選び方により様々な値をとるが，式 (2.33) で定義された値は座標の選び方に寄らず不変な値となる。

### 2. 3. 3 運動量および角運動量保存則

領域  $D_t$  を占める物質の運動量  $M(D_t)$  および原点  $O$  まわりの角運動量  $H(D_t, O)$  は次式で定義される。

$$M(D_t) = \int_{D_t} \rho v dv, \quad H(D_t, O) = \int_{D_t} x \times \rho v dv \quad (2.34)$$

運動量保存則とは物体に作用する力の合力が物体の運動量の変化率（物質時間微分）に等しいという原理であり，次のように表せる。

$$\int_{\partial D_i} t da + \int_{D_i} \rho b dv = \frac{d}{dt} \int_{D_i} \rho v dv = \int_{D_i} \rho \dot{v} dv \quad (2.35)$$

また、角運動量保存則とは物体に作用する合モーメントが物体の角運動量の変化率（物質時間微分）に等しいという原理であり、次のように表せる。

$$\int_{\partial D_i} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da + \int_{D_i} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} dv = \frac{d}{dt} \int_{D_i} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{D_i} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv \quad (2.36)$$

式 (2.34) に Cauchy の式 (2.31) を用いて左辺第一項に Gauss の発散定理を用いると次式のように変形できる。

$$\int_{D_i} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dv = 0 \quad (2.37)$$

式 (2.37) は物体中の任意の場所で成り立つので、運動量保存則の局所形として次式を得る。

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}} = 0, \quad T_{ij,j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i = 0 \quad (2.38)$$

式 (2.36) に式 (2.31) を用いて左辺第一項に Gauss の発散定理を用いると次のように変形できる。

$$\int_{D_i} e_{ijk} T_{kj} dv + \int_{D_i} e_{ijk} x_j (T_{ke,\ell} + \rho b_k - \rho \dot{v}_k) dv = 0 \quad (2.39)$$

式 (2.38) より式 (2.39) の第 2 項は 0 となるので、式 (2.39) は、

$$\int_{D_i} e_{ijk} T_{kj} dv = 0 \quad (2.40)$$

となる。領域  $D$  は物体中の任意の場所にとることができるので次式となる。

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T, \quad T_{ij} = T_{ji} \quad (2.41)$$

ゆえに角運動量保存則は Cauchy 応力の対称性を示す。

式 (2.38) と式 (2.41) を運動方程式という。

## 2. 3. 4 ラグランジュ的な運動方程式の記述

まず, Cauchy 応力以外の種々の応力について説明する. 微小面素  $a$  が変形前に微小面素  $A$  であったとする.  $A$  の面積を  $|A|$  と書き,

$$s = \lim_{|A| \rightarrow 0} \frac{P}{|A|} \quad (2.42)$$

が存在するならば, これを Piola の表面力と呼ぶ. Cauchy の表面力の場合と同様に考えれば

$$s = SN \quad (2.43)$$

となるテンソル  $S$  が存在することがわかる. ここで,  $N$  は微小面素  $A$  の単位法線ベクトルである.  $S$  を第 1 Piola・Kirchoff 応力と呼ぶ.

$$SNdA = Tnda \quad (2.44)$$

であるので,  $S$  と Cauchy 応力  $T$  とは次の関係式で結ばれる:

$$S = JTF^{-T} \quad (2.45)$$

一般に  $S$  は対称ではない.

$S$  の非対称性を取り除くために, 次の第 2 Piola・Kirchoff 応力  $\hat{S}$  が用いられることがある.

$$\hat{S} = JF^{-1}TF^{-T} \quad (2.46)$$

$\hat{S}$  には  $S$  のような明確な物理的意味はない.

次いで, ラグランジュ的な運動方程式を紹介する. 第 1 Piola・Kirchoff 応力を用いると運動方程式, 式 (2.38) と式 (2.41) はそれぞれ次のようになる.

$$\text{Div } S(X, t) + \rho_0(X)b(X, t) = \rho_0(X)\ddot{x}(X, t) \quad (2.47)$$

$$SF^T = FS^T \quad (2.48)$$

ここで,  $\text{Div}$  は  $X$  での偏微分を表す. また, 第 2 Piola・Kirchoff 応力を用いると運動方程式は次のようになる.

$$\operatorname{Div} F\hat{S}(X,t) + \rho_0(X)b(X,t) = \rho_0(X)\ddot{x}(X,t) \quad (2.49)$$

$$\hat{S} = \hat{S}^T \quad (2.50)$$

## 2. 4 構成式に関する基本法則

### 2. 4. 1 物理量について

構成式について説明する前に物理量について若干説明を加える。異なる剛体運動する二つの運動を与えたとき、物理量にはその対象のとりから特別な性質を持った量が存在する。それは客観量と不変量、そのどちらでもないものに分けられる。

今、運動  $x(X,t)$  と剛体運動だけ異なる運動  $x^*(X,t)$  を考える。このとき、運動  $x^*(X,t)$  は次のように書ける。

$$x^*(X,t) = Q(t)x(X,t) + c(t) \quad (2.51)$$

ここで、 $Q(t)$  は剛体回転 ( $\det(Q(t))=1$ ) を表す直交テンソルであり、 $c(t)$  は剛体移動を表すベクトルである。

客観量とは、異なる剛体運動する二つの運動を与えたとき、物体  $B$  に同じように作用する物理量のことをいう。 $x(X,t)$  と  $x^*(X,t)$  の二つの運動にそれぞれ対応してスカラー  $\varphi, \varphi^*$ , ベクトル  $v, v^*$ , テンソル  $T, T^*$  の物理量を考える。これらが次式を満足するとき、その物理量は客観量であるという。

$$\varphi^* = \varphi, \quad v^* = Qv, \quad T^* = QTQ^T \quad (2.52)$$

不変量とは、剛体運動だけ異なる二つの運動を与えたとき、その形が不変となる物理量のことをいう。すなわち、次式を満足するとき、その物理量是不変量であるという。

$$\varphi^* = \varphi, \quad v^* = v, \quad T^* = T \quad (2.53)$$

### 2. 4. 2 構成式について

2.3 章で述べた諸法則は材料の種類に関わらず成り立つものであるが、それらの法則だけでは物体の応力や変形を決定することができない。実際には、材料の力学的性質を規定する関係である構成式を加えることにより、閉じた（初期値境界値問題として論ずることに意味がある）方程式系が得られる。しかし構成式は全く任意に与えるものではなく、物理的に有意であるために若干の制限を受ける。それは以下の3つである。

I 決定論の原理

II 局所作用の原理

III 客観性の原理

決定論の原理とは、物体中の物質点  $X$  の応力状態がその物体の現在までの運動履歴によって一意に決定されるという原理であり、局所作用の原理とは物体中の物質点  $X$  の応力状態は物質点  $X$  の近傍のみの運動履歴によって一意に決定されるという原理である。客観性の原理とは構成式が時間、および剛体運動に依存しないという原理である。

基準状態（基準配置  $\kappa$ ）を考え、ある物体  $B$  の物質点  $X$  に着目する。時刻  $t$  における位置は  $x = \hat{x}(X, t)$  であり、そのときの応力  $T$  は時刻  $t$  における物体  $B$  の運動履歴と時刻  $t$  により一意に決定される。

過去から現在までの運動履歴を表すために現在を原点として過去にさかのぼるにつれ増加する時間  $s$  を考える。現在から時間  $s$  だけさかのぼった時刻  $t-s$  での運動は  $x(X, t-s)$  で表されるので、

$$T(x(X, t), t) = f_{\kappa}(X, t, x(\bar{X}, t-s)), \quad \bar{X} \in B, \quad 0 < s < \infty \quad (2.54)$$

ここで、 $f_{\kappa}$  は一般に基準配置  $\kappa$  に依存する関数である。式 (2.54) をもって決定論の原理という。

決定論の原理によると、物質点  $X$  での応力状態は物体  $B$  の全体の影響を受ける。しかし、応力は 2.3.2 章で接触力から定義されており、応力とは本質的に局所的なものであると考えられる。よって応力  $T$  が物質点  $X$  の近傍  $U(X)$  の運動履歴により決定され则认为ると、

$$T(x(X, t), t) = f_{\kappa}(X, t, x(\tilde{X}, t-s)), \quad \tilde{X} \in U(X), \quad 0 < s < \infty \quad (2.55)$$

と書ける。式 (2.55) をもって局所作用の原理という。

また、構成式は絶対時間に依存することはない。今、運動  $x(X, t-s)$  による時刻  $t$  での応力は運動  $x(X, t-s)$  を過去へ  $a$  だけシフトした運動  $x(X, t-s+a)$  による時刻  $t-a$  における応力に等しいと考えられる。ここに  $a$  は任意の定数である。ゆえに式 (2.54) より

$$\begin{aligned} f_{\kappa}(X, t, x(\bar{X}, t-s)) &= f_{\kappa}(X, t-a, x(\bar{X}, t-a-s+a)), \quad \bar{X} \in B, \quad 0 < s < \infty \\ &= f_{\kappa}(X, t-a, x(\bar{X}, t-s)) \end{aligned} \quad (2.56)$$

となり、 $f_{\kappa}$  は第 2 の引数  $t$  によらないことになる。

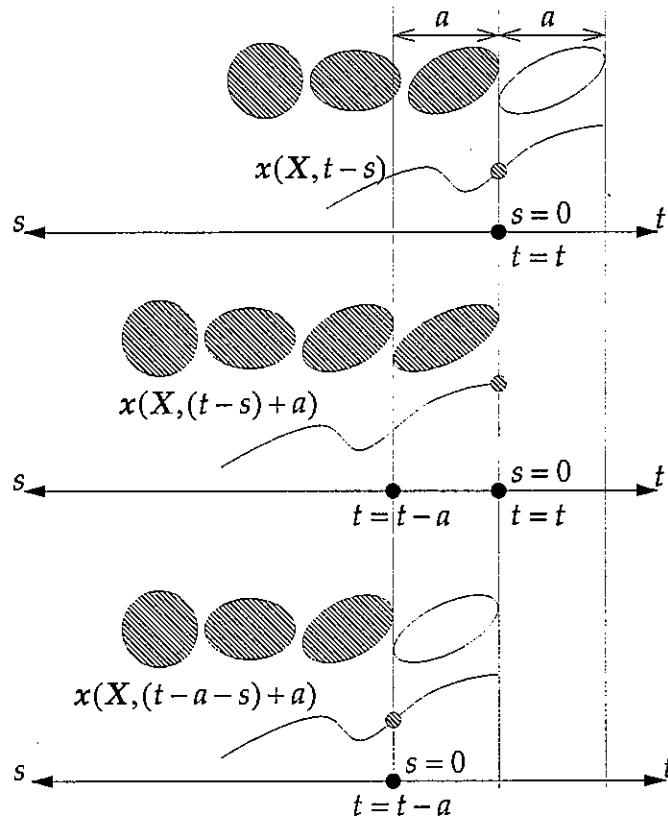


図 2.6 構成式の時間不依存性

最後に構成式は剛体運動に依存しない．今，運動  $x(X, t)$  による応力は，運動  $x(X, t)$  と剛体運動だけ異なる式 (2.51) で与えられる運動  $x^*$  による応力と時刻  $t$  での回転を除いて一致するであろう．式 (2.52)<sub>3</sub> で示したように 2 階のテンソルは  $T$  を  $Q(t)$  だけ剛体回転させたものは  $QTQ^T$  であるから，構成汎関数は，次式を満足しなければならない．

$$f_{\kappa}(X, x^*(\bar{X}, t-s)) = Q(t)f_{\kappa}(X, x(\bar{X}, t-s))Q^T(t), \quad \bar{X} \in B, \quad 0 < s < \infty \quad (2.57)$$

式 (2.56) と式 (2.57) をもって構成式の客観性の原理という．

## 2. 5 速度型の運動方程式

弾塑性体などの構成式を取り扱うときは弾性体のように応力がひずみの関数でなく，応力速度が，ひずみ，応力，およびひずみ速度の関数として表される．その場合，運動方程式は速度型で表す必要がある．質量保存則が成り立つとき，式 (2.35) の両辺の物質時間微分をとると次式が得られる．

$$\int_{D_t} (\dot{t} da) + \int_{D_t} \rho \dot{b} dv = \int_{D_t} \rho \ddot{u} dv \quad (2.58)$$

ここで， $(\dot{t} da) = (\text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}) da$  であるから (Appendix A) ，

$$(\dot{t} da) = [\dot{t} + (\text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}) t] da \equiv \dot{s}_t da \quad (2.59)$$

となる．上式で定義された

$$\dot{s}_t = \dot{t} + (\text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}) t \quad (2.60)$$

を公称表面力速度と呼ぶ．式 (2.60) は  $\dot{\mathbf{n}} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n} - \mathbf{L}^T) \mathbf{n}$  であるから (Appendix A) ，

$$\begin{aligned} \dot{s}_t &= \dot{T} \mathbf{n} + T \dot{\mathbf{n}} + (\text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}) T \mathbf{n} \\ &= \dot{T} \mathbf{n} + T (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n} - \mathbf{L}^T) \mathbf{n} + (\text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \mathbf{n}) T \mathbf{n} \\ &= \{\dot{T} + T(\text{tr } \mathbf{D}) - T \mathbf{L}^T\} \mathbf{n} \\ &\equiv \dot{\mathbf{S}}_t \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.61)$$

となる．上式で定義された

$$\dot{\mathbf{S}}_t = \dot{T} + T(\text{tr } \mathbf{D}) - T \mathbf{L}^T \quad (2.62)$$

を公称応力速度と呼ぶ．式 (2.58) に式 (2.62) を用いると，

$$\int_{D_t} \dot{\mathbf{S}}_t \mathbf{n} da + \int_{D_t} \rho \dot{b} dv = \int_{D_t} \rho \ddot{u} dv \quad (2.63)$$

となり，左辺第一項に Gauss の発散定理を用いることにより，次の速度型の運動方程式 (増分釣合式) が導かれる．



$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{S}}_i + \rho \dot{\mathbf{b}} - \rho \ddot{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.64)$$

式 (2.34) より上と同様にして, あるいは式 (2.39) の両辺の物質時間微分をとり, 式 (2.64) を用いることにより, 次の速度型の角運動量保存則が導かれる.

$$\dot{\mathbf{S}}_i + \mathbf{T}\mathbf{L}^T = \dot{\mathbf{S}}_i^T + \mathbf{L}\mathbf{T} \quad (2.65)$$

一方, ラグランジュ的な運動方程式, 式 (2.45) と式 (2.46) の物質時間微分をとれば, 初期状態を基準としたラグランジュ的な速度型の運動方程式が次のように導かれる.

$$\operatorname{Div} \dot{\mathbf{S}} + \rho_0 \dot{\mathbf{b}} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.66)$$

$$\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + \mathbf{S}\dot{\mathbf{F}}^T = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{S}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}^T \quad (2.67)$$

## 2. 6 有限変形非共軸 Cam-clay モデル

本論文では粘土の構成式として正規圧密された粘土を対象とした Cam-clay モデルとせん断帯を発生しやすくするために Cam-clay モデルに非共軸項を加えた非共軸 Cam-clay を用いる。

粘土は等方応力条件下においても塑性変形を示す材料であり、このような粘土の力学的挙動を記述できる弾塑性構成式を Roscoe ら<sup>10)</sup> は誘導した。その構成式は、Cam-clay モデルとよばれ、粘土の限界状態を考慮に入れ、消散エネルギーの関係式を与えるとともに、Drucker の弾塑性体理論に基づいて確立されたものである。

また、Rudnicki と Rice<sup>4)</sup> は岩石の圧縮試験などで生じるせん断帯に注目しそれを表すことを目的とした非共軸項を付加した弾塑性構成式を提案した。矢富ら<sup>5)</sup> は非共軸項を Cam-clay モデルに導入することにより、せん断帯の発生の可能性を示す粘土の構成式を導いた。

本論文では飽和土を考える。飽和土は土粒子骨格（固体）とその間隙を満たす水（液体）の二相からなる混合体であり、土粒子骨格および間隙水が非圧縮であるとして、次に示す Terzaghi の提案した有効応力の原理が成り立つものとする。

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} + u\mathbf{I} \quad (2.68)$$

ここで、 $\mathbf{T}'$  は有効 Cauchy 応力、 $\mathbf{T}$  は全 Cauchy 応力、 $u$  は間隙水圧である。また、平均有効主応力  $p'$ 、一般化された偏差応力  $q$  はそれぞれ次式で表される。

$$p' = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}', \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{S}\| \quad (2.69)$$

ここで、 $\mathbf{S}$  は有効 Cauchy 応力の偏差応力であり、 $\|\dots\|$  で... のノルムを表す。なお、平均有効主応力  $p'$ 、間隙水圧  $u$  および体積ひずみ  $v$  は圧縮および収縮を正とするが、それ以外は引張りおよび伸張を正とする。

まず、全ストレッチング  $\mathbf{D}$  が次式のように表されるものとする。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.70)$$

ここで、右肩の  $e$  は弾性部分を、また  $p$  は塑性部分を表す。

等方圧密を考える。間隙比を  $e$  としてその微小増分を  $\dot{e}$  と表すなら、 $\dot{e}$  は有効主応力増分  $\dot{p}'$  との間に次の関係が成り立つ。

$$\dot{e} = -\lambda \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (2.71)$$

ゆえに、体積ひずみ速度は、

$$\begin{aligned} \dot{v} (= -\text{tr} \mathbf{D} = -\frac{\dot{J}}{J} = -\frac{\dot{e}}{1+e}) \\ = \frac{\lambda}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} \end{aligned} \quad (2.72)$$

となる。ここで、 $\lambda$ は圧縮指数である。同様に等方膨潤を考えるなら、次式を得る。

$$\dot{v}^e = \frac{\kappa}{1+e} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (2.73)$$

ここで、 $\kappa$ は膨潤指数である。そのとき、体積弾性係数 $\tilde{K}$ は次式のように表され、

$$\tilde{K} = \frac{1+e}{\kappa} p' \quad (2.74)$$

また、せん断弾性係数 $\tilde{G}$ は等方弾性体での関係を使用し次式のようになる。

$$\tilde{G} = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \tilde{K} \quad (2.75)$$

ここで、 $\nu$ はポアソン比である。一方ダイレイタンシーによる体積ひずみ速度は、

$$\dot{v}^p = D \left( \frac{q}{p'} \right) \quad (2.76)$$

となる。ここで、 $D$ はダイレイタンシー係数であり、限界状態パラメータ $M$ <sup>9)</sup>との間に次の関係が成り立つ。

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{M(1+e)} \quad (2.77)$$

ゆえに、塑性体積ひずみ速度は式 (2.72)，式 (2.73)，および式 (2.76) より次式となる。

$$\dot{v}^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \frac{\dot{p}'}{p'} + D \dot{\eta} \quad (2.78)$$

微小変形における Cam-clay モデル<sup>10)</sup> を真似て降伏汎関数を次のように与える。

$$f = \int_0^t \left( \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \frac{\dot{p}'}{p'} + D \dot{\eta} \right) dt - v^p \quad (2.79)$$

ここで、 $t=0$  のとき  $v^p = 0$  である。一般に、間隙比  $e$  は負荷にともない変化するが、非排水条件を考えると  $e$  は  $t$  の関数ではなくなり、式 (2.79) の第 1 項は簡単に積分ができる。非排水条件を考え、式 (2.79) の  $t$  での全微分を考えると、

$$\dot{f} = N_{ij} \dot{T}'_{ij} - \dot{v}^p \quad (2.80)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} N_{ij} &= D \left( M \frac{1}{p'} \frac{\partial p'}{\partial T'_{ij}} + \frac{\partial \eta}{\partial T'_{ij}} \right) \\ &= \frac{D}{p'} \left( \frac{3}{2\eta} \frac{S_{ij}}{p'} + \frac{1}{3} \beta \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

であり、 $\beta = M - \eta$  とおいた。また  $\delta_{ij}$  は Kronecker の記号である。ストレッチングの弾性部分  $D^e$  と有効 Cauchy 応力の Jaumann 速度

$$\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}}' - \mathbf{W}\mathbf{T}' + \mathbf{T}'\mathbf{W} \quad (2.82)$$

との間に、次式のように Hooke の法則が成り立つとする。

$$\dot{\mathbf{T}}'_{ij} = E_{ijkl}^e D_{kl}^e \quad (2.83)$$

ここで、 $E_{ijkl}^e = (\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  である。

一方、ストレッチングの塑性部分は  $N_{ij} \dot{\mathbf{T}}'_{ij} = N_{ij} \dot{\mathbf{T}}'_{ij}$  であることを考慮に入れると次式で示さ

れる.

$$D_{ij}^p \begin{cases} = \Lambda N_{ij} & \text{if } f = 0 \text{ with } N_{ij} \dot{T}'_{ij} > 0 \\ = 0 & \text{if } f < 0, \text{ or if } f = 0 \text{ with } N_{ij} \dot{T}'_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

ここで,  $\Lambda$  は式 (2.70), 式 (2.81), 式 (2.83), および式 (2.84)<sub>1</sub> より次式となる.

$$\Lambda = \frac{E_{ijkl}^e N_{ij} D_{kl}}{E_{ijkl}^e N_{ij} N_{kl} - N_{kk}} \quad (2.85)$$

式 (2.70), 式 (2.83), および式 (2.84)<sub>1</sub> より, 有限変形場の Cam-clay モデルの構成式は次式となる.

$$\dot{T}'_{ij} = \left\{ (\tilde{K} - \frac{2}{3} \tilde{G}) \delta_{ij} \delta_{kl} + \tilde{G} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{\tilde{G} + \tilde{K} \bar{\beta}^2 + h} (\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}} S_{ij} - \tilde{K} \bar{\beta} \delta_{ij}) (\frac{\tilde{G}}{\bar{\tau}} S_{kl} - \tilde{K} \bar{\beta} \delta_{kl}) \right\} D_{kl} \quad (2.86)$$

ここで,  $\bar{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{3}}$ ,  $\bar{\tau} = \frac{\|S\|}{\sqrt{2}}$  である. また,  $h$  は硬化係数であり次式で与えられる.

$$h = \frac{p' \bar{\beta}}{\sqrt{3} D} \quad (2.87)$$

式 (2.81) を式 (2.84)<sub>1</sub> に代入すると次式を得る.

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} (\frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{T}'_{kl} - \bar{\beta} \frac{\dot{T}'_{kk}}{3}) \quad (2.88)$$

$$D_{kk}^p = -\frac{\bar{\beta}}{h} (\frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{T}'_{kl} - \bar{\beta} \frac{\dot{T}'_{kk}}{3}) \quad (2.89)$$

ここで,  $D^{*p}$  は  $D^p$  の偏差成分である. 式 (2.88) からわかるように  $D^{*p}$  の主軸と  $S$  の主軸が一致するので, 式 (2.86) で示される構成式を共軸 Cam-clay モデルと呼ぶことにする.

Rudnicki と Rice に倣い, 式 (2.88) に  $S$  と直交するような非共軸項を付加した次のような塑性偏差ひずみを考える.

$$2D_{ij}^{*p} = \frac{1}{h} \frac{S_{ij}}{\bar{\tau}} \left( \frac{S_{kl}}{2\bar{\tau}} \dot{T}_{kl}' - \bar{\beta} \frac{\dot{T}_{kk}'}{3} \right) + \frac{1}{h_1} \left( \dot{S}_{ij} - \frac{S_{ij}S_{kl}}{2\bar{\tau}^2} \dot{S}_{kl} \right) \quad (2.90)$$

ここで、 $h_1$ は第2硬化係数であり、簡単化のため硬化係数と同様の形をした次式で仮定する。

$$h_1 = \frac{p'\bar{\beta}}{\sqrt{3}A} \quad (2.91)$$

ここで、 $A$ は正の物質定数であり、非共軸パラメータと呼ばれる。

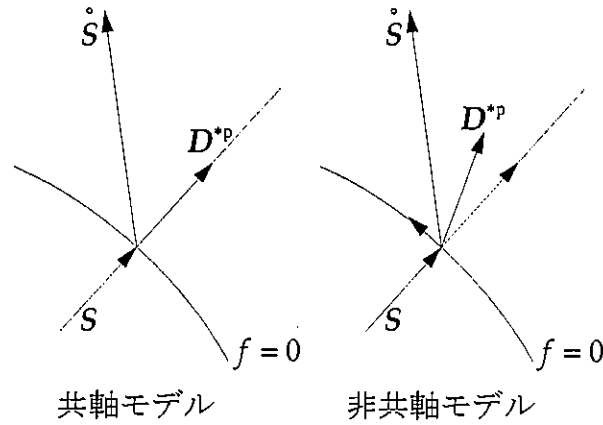


図 2.7 共軸モデルと非共軸モデル

式 (2.90) の第2項は $S$ との内積が0になるという意味で $S$ と直交しており、偏差塑性仕事増分 $\dot{W}^{*p} = S_{ij}D_{ij}^{*p}$ に無関係であることがわかる。ゆえに第2項を加えても消散エネルギーには影響しない。

結局、非共軸項を付加した場合は、式 (2.89) と式 (2.90) を用いると、非共軸 Cam-clay モデルの構成式は式 (2.86) において以下のように変数変換した形で得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{G} &\rightarrow \frac{h_1 \tilde{G}}{h_1 + \tilde{G}} \\ \tilde{K} &\rightarrow \frac{(h_1 - h) \tilde{K}}{h_1 - h - \bar{\beta}^2 \tilde{K}} \\ h &\rightarrow \frac{h_1 h}{h_1 - h} \\ \bar{\beta} &\rightarrow \frac{h_1 \bar{\beta}}{h_1 - h} \end{aligned} \quad (2.92)$$

また、非共軸モデルにおいて非共軸パラメータ  $A \rightarrow 0$  とすれば  $h_1 \rightarrow \infty$  となり、式 (2.92) の変数変換は無用となり共軸モデルとなる。

共軸 Cam-Clay モデルと非共軸 Cam-clay モデルではどのような効果を示すかを考えてみる。まず、応力が均質な微小要素を考え、応力の主軸方向に  $x_1, x_2$  軸をとる（すなわち  $T'_{12} = T'_{23} = T'_{31} = 0$ ）。そのとき、平面ひずみ状態 ( $D_{33} = 0$ )、非圧縮条件 ( $D_{11} + D_{22} + D_{33} = 0$ ) の下で  $T'_{33} = \frac{T'_{11} + T'_{22}}{2}$  を仮定するなら、式 (2.86) より共軸 Cam-clay モデルでは次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11} - \dot{T}'_{22} &= 2\mu^*(D_{11} - D_{22}) \\ \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \quad (2.93)$$

ただし、

$$\mu^* = \frac{\tilde{G}\tilde{h}}{\tilde{G} + \tilde{h}}, \quad \mu = \tilde{G} \quad (2.94)$$

であり、 $\tilde{h} = \tilde{K}\tilde{\rho}^2 + h$  とおいた。 $\mu^*$  は 45 度せん断剛性、 $\mu$  は単純せん断剛性と呼ばれる。同様の条件の下で非共軸 Cam-clay モデルを考えるなら、式 (2.94) において式 (2.92) の変数変換を行うと次式となる。

$$\mu^* = \frac{\tilde{G}\tilde{h}}{\tilde{G} + \tilde{h}}, \quad \mu = \frac{\tilde{G}h_1}{\tilde{G} + h_1} (< \tilde{G}) \quad (2.95)$$

式 (2.94) と式 (2.95) より、非共軸 Cam-clay モデルの 45 度せん断剛性は共軸 Cam-clay モデルのそれと同じであるが、単純せん断剛性は共軸 Cam-clay モデルより小さくなることわかる。式 (2.94) より、共軸モデルでは塑性変形が進行しても単純せん断剛性  $\mu$  が常に弾性状態と等しいことを意味する。

一方、非共軸モデルでは塑性変形の進行に伴い 45 度せん断剛性は共軸モデルの場合と変わらないが、単純せん断剛性  $\mu$  は弾性状態より式 (2.95) に従い低下する。ゆえに単純せん断を生じさず応力増分が与えられた時、共軸モデルより単純せん断変形が生じやすくなるので、非共軸モデルではせん断ひずみの局所化が生じやすくなると考えられる。

## 2. 7 分岐の理論<sup>11)</sup>

### 2. 7. 1 分岐と唯一性の一般論

準静的な変形のある段階  $t = t_0$  で平衡状態にある物体の形状、応力分布および材料の構成則が既知であるとする。ここで、指定された境界条件を満足するような次段階  $t = t_0 + \Delta t$  の平衡状態が唯一に定まるかどうかということを現在の平衡状態で吟味する事によって、唯一性が議論できる。

今考えている状態 ( $t = t_0$ )，すなわち現配置において  $x_i$  なる座標を設定し，粒子  $x$  は  $\Delta t$  後に  $x + v \Delta t$  に移動したとする。また，現配置で物体表面  $\Gamma$  の一部  $\Gamma_\sigma$  で  $\dot{s}_i$ ，残りの  $\Gamma_v$  において速度  $v$  が与えられている時， $\Delta t$  時間後の平衡状態を規定する境界値問題は次のようになる。

増分釣合式：

$$\operatorname{div} \dot{S}_i = 0 \quad (2.96)$$

境界条件：

$$\begin{aligned} \dot{S}_i n &= \overline{\dot{s}}_i & \text{on } \Gamma_\sigma \\ v &= \overline{v} & \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \quad (2.97)$$

ここで，物体力はないものとし， $n$  は現配置における物体表面の外向き単位法線ベクトルである。表面力速度はさらに次のように分類して考える。

$$\dot{s}_i = \dot{t} + f(v) \quad (2.98)$$

$\dot{t}$  は速度  $v$  と無関係に与えられる部分であり，圧縮荷重など物体の変形中その大きさと方向が変わらない通常死荷重と呼ばれているものである。一方，流体圧，弾性拘束，摩擦力やダイス反力といったものはその大きさや方向が速度  $v$  によって変化するので  $f(v)$  に属しこれらは制御不能と考えられる。このうち前二者は線型であるが残りは非線型となる。ここでは，線型の場合のみを取り上げる事にする。このうち最もよく遭遇する流体圧は，各瞬間の単位面積当たり  $p$  の大きさで与えられ，表面の内向き法線方向に作用するので， $\dot{s}_i$  は次式となる。

$$\dot{s}_i = -\dot{p} n + p \{L^T - (\operatorname{tr} D) 1\} n \quad (2.99)$$

従って，



$$\dot{t} = -\dot{p}n, \quad f(v) = p\{L^T - (\text{tr}D)I\}n \quad (2.100)$$

となる.  $f(v)$  の第 1 項は法線方向, 第 2 項は面積の変化によって生じた項である.

今, 式 (2.96), 式 (2.97) を満足する異なった 2 組の解  $(\dot{S}_i, v)$  および  $(\dot{S}_i^*, v^*)$  が存在したとしてそれらの間の差  $(\Delta\dot{S}_i, \Delta v)$  は,

$$\begin{aligned} \text{div } \Delta\dot{S}_i &= 0 \\ \Delta\dot{S}_i n &= f(\Delta v) && \text{on } \Gamma_\sigma \\ \Delta v &= 0 && \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \quad (2.101)$$

を満足しなければならない. 言い換えれば (2.101) を満たす恒等式に非自明な解が存在する状態が分岐点である. その意味で (2.101) を分岐方程式と呼ぶ. ここでは唯一性の破れる限界点としての分岐点を定めるために, 以下のような基準を導入する.

式 (2.101)<sub>1</sub> に  $\Delta v$  を内積して体積積分を施し Gauss の発散定理を用いると次式が導かれる.

$$0 = \int \text{div } \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta v dv = \int_{\partial v} \Delta\dot{S}_i n \cdot \Delta v ds - \int \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L dv \quad (2.102)$$

ここで,  $\Delta L = \text{grad } \Delta v$  である. 右辺の表面積分に式 (2.101)<sub>2,3</sub> を用いることにより,

$$\int_{\Gamma_\sigma} f(\Delta v) \cdot \Delta v ds - \int \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L dv = 0 \quad (2.103)$$

が成立しなければならない. ゆえに,

$$I[\Delta v] = \int \Delta\dot{S}_i \cdot \Delta L dv - \int_{\partial v} f(v) \cdot \Delta v ds > 0 \quad (2.104)$$

が  $\Gamma_v$  上で 0 となる非自明な任意の  $\Delta v$  について成立するならば  $t = t_0 + \Delta t$  における平衡状態は唯一に決まるといえる. これが Hill によって与えられた唯一性の十分条件である.

## 2. 7. 2 弾塑性体への適用

構成則として Cauchy 応力の Jaumann 速度  $\dot{T}$  とストレッチング  $D$  について,

$$\dot{T} = CD, \quad \dot{T}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (2.105)$$

と書く事にすると公称応力速度  $\dot{S}_i$  と速度勾配  $L$  との間に次式が成り立つ.

$$\dot{S}_i = AL, \quad \dot{S}_{t_{ij}} = A_{ij\ell\ell} L_{\ell\ell} \quad (2.106)$$

$A$  を指標表示するなら,

$$A_{ij\ell\ell} = \frac{1}{2}(C_{ij\ell\ell} + C_{ij\ell\ell}) + T_{ij}\delta_{\ell\ell} + \frac{1}{2}(T_{\ell j}\delta_{ik} - T_{i\ell}\delta_{jk} - T_{kj}\delta_{i\ell} - T_{ik}\delta_{j\ell}) \quad (2.107)$$

となり, 応力, ひずみの対称性を考慮すると,

$$A_{ij\ell\ell} = C_{ij\ell\ell} + T_{ij}\delta_{\ell\ell} + \frac{1}{2}(T_{\ell j}\delta_{ik} - T_{i\ell}\delta_{jk} - T_{jk}\delta_{i\ell} - T_{ik}\delta_{j\ell}) \quad (2.108)$$

となる. 上式を式 (2.104) に適用すると次の様になる.

$$I[\Delta v] = \int \Delta D \cdot \Delta(CD) dv + \Sigma[\Delta v] > 0 \quad (2.109)$$

ここで,

$$\Sigma[v] = \int T_{ik}(D_{ij}D_{ik} + L_{jk}L_{ji} - 2D_{ij}D_{jk}) dv - \int_v f(v) \cdot v ds \quad (2.110)$$

である. 式 (2.105) の係数  $C$  は一般に基準状態の応力, ひずみ等の関数であるが応力速度  $\dot{T}$  およびストレッチング  $D$  に依存しない場合を線型固体, そうでない場合を非線型固体と呼ぶ. 弾塑性体は非線型固体である.

非線型固体の場合  $\Delta(CD) \neq C\Delta D$  であり, かつ  $I[\Delta v]$  は  $\Delta v$  に関して一価性が保証されない. 汎関数  $I[\Delta v]$  の多価性は実用上不便であるから次のような仮想的な線型構成式を導入する.

$$\dot{T}^L = C^L D, \quad \Delta T^L = C^L \Delta D, \quad \Delta D \cdot \Delta(CD) \geq \Delta D \cdot C^L \Delta D \quad (2.111)$$

この構成式で規定されるような仮想固体を線型比較体と呼び, その唯一性の基準汎関数

$$L[\Delta v] = \int \Delta D \cdot C^L \Delta D dv + \Sigma[\Delta v] > 0 \quad (2.112)$$

を定義すれば式 (2.111) より  $I[\Delta v] \geq L[\Delta v]$  であり, かつ  $L[\Delta v]$  は一価である. そこで線型

比較体について唯一性の限界点を定めれば安全側の分岐点を得られる．しかしながら式 (2.112) は実際の非線型固体の唯一性に対しては、過十分であるから、この分岐点において実際に分岐が生ずるかどうかは別に調べなければならない．

したがって、ある特定の分岐モード  $\Delta v^*$  で次式を満足するなら、唯一性が破られるという意味で分岐方程式となる．

$$\begin{aligned} L[\Delta v^*] &= \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijk\ell}^L \frac{\partial \Delta v_k^*}{\partial x_\ell}) = 0 \\ n_j A_{ijk\ell}^L \frac{\partial \Delta v_k^*}{\partial x_\ell} - f_i(\Delta v^*) &= 0 \quad \text{on } \Gamma_\sigma \\ \Delta v &= 0 \quad \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \quad (2.113)$$

ただし  $A_{ijk\ell}$  の定義において  $C_{ijk\ell}$  を  $C_{ijk\ell}^L$  に置き換えたものを  $A_{ijk\ell}^L$  とする．したがって分岐点  $t_b$  はこの斉次境界値問題の固有値として定まる．固有関数  $\Delta v^*$  は線型比較体の分岐モードであるが実際の分岐モードとは限らない．実際には次段階の変形は、

$$\begin{aligned} L[v] &= \frac{\partial}{\partial x_j} (A_{ijk\ell}^L \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell}) = 0 \\ n_j A_{ijk\ell}^L \frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} - f_i(v) &= \bar{s}_{ti} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \\ v_i &= \bar{v}_i \quad \text{on } \Gamma_v \end{aligned} \quad (2.114)$$

なる境界値問題の解で与えられる．しかし弾塑性体の場合、式 (2.114) の解が全域負荷で実現される場合には、 $A_{ijk\ell} = A_{ijk\ell}^L$  であるから、 $\Delta v^*$  は式 (2.114) の斉次解となり  $c$  を任意定数として  $v + c\Delta v^*$  も解である．従って、 $c \neq 0$  を全域負荷の条件を満たすように選べるときは、 $t = t_b$  にて実際に分岐が生じ得る事になる．

### 2. 7. 3 粘土の構成式への適用

前節では構成式として Cauchy 応力の Jaumann 速度  $\dot{T}$  とストレッチング  $D$  の関係式で与えられる一般的な場合について説明した．本節では本論文で取り扱う Cam-clay モデル<sup>5)</sup> の構成式の場合について考える．その際、現配置すなわち分岐直前まで均一変形を保っていると考える．

まず Cauchy 応力  $T$ 、有効 Cauchy 応力  $T'$  と間隙水圧  $u$  の間に次に示す有効応力の原理が与えられる．

$$T = T' + uI \quad (2.68 : \text{再掲})$$

ここで、 $I$  は単位テンソルである。

公称応力速度は式 (2.62) で示したように次式で与えられる。

$$\dot{S}_t = \dot{T} + T \operatorname{tr} D - T L^T \quad (2.62 : \text{再掲})$$

式 (2.68) の有効応力の原理を式 (2.62) に用いることにより、

$$\begin{aligned} \dot{S}_t &= \dot{T}' + T' \operatorname{tr} D - T' L^T - \dot{u} I - u(\operatorname{tr} D) I + u L^T \\ &= \dot{S}'_t - \dot{u} I - u(\operatorname{tr} D) I + u L^T \end{aligned} \quad (2.115)$$

ここで、 $\dot{S}'_t$  は有効公称応力速度と呼び、公称応力速度の定義において、Cauchy 応力のかわりに有効 Cauchy 応力を用いたものであり、次式で定義する。

$$\dot{S}'_t = \dot{T}' + T' \operatorname{tr} D - T' L^T \quad (2.116)$$

式 (2.115) を式 (2.96) に代入すると、

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{S}_t &= \operatorname{div} \dot{S}'_t - \dot{u} I - u(\operatorname{tr} D) I + u L^T \\ &= \dot{S}'_{t,ij,j} - \dot{u}_{,j} \delta_{ij} - u_{,j} v_{k,k} \delta_{ij} - u v_{k,kj} \delta_{ij} + u_{,j} v_{j,i} + u v_{j,ij} \\ &= \dot{S}'_{t,ij,j} - \dot{u}_{,i} - u_{,i} v_{k,k} + u_{,j} v_{j,i} (= 0) \end{aligned}$$

となり、分岐の直前において、均一変形状態を保っているなら間隙水圧  $u$  は均一であるから、式 (2.96) は次式となる。

$$\operatorname{div} \dot{S}'_t - \operatorname{grad} \dot{u} = 0 \quad (2.117)$$

また、均一変形状態を保っているなら間隙水の連続式より次式が得られる。

$$\operatorname{tr} D = 0 \quad (2.118)$$

ゆえに有効応力の原理が成り立つとき、均一変形状態下にある物体の  $\Delta t$  時間後の平衡状態を規定する境界値問題は次のようになる。

$$\operatorname{div} \dot{S}'_t - \operatorname{grad} \dot{u} = 0$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} \boldsymbol{D} &= 0 \\
\dot{\boldsymbol{S}}_t \boldsymbol{n} &= \overline{\dot{\boldsymbol{S}}_t} & \text{on } \Gamma_\sigma \\
\boldsymbol{v} &= \overline{\boldsymbol{v}} & \text{on } \Gamma_v
\end{aligned} \tag{2.119}$$

2.7.1 章と同様にここでも、式 (2.119) を満足する異なった 2 組の解  $(\dot{\boldsymbol{S}}_t, \boldsymbol{v})$  および  $(\dot{\boldsymbol{S}}_t^*, \boldsymbol{v}^*)$  が存在したとしてそれらの間の差  $(\Delta \dot{\boldsymbol{S}}_t, \Delta \boldsymbol{v})$  は、

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \Delta \dot{\boldsymbol{S}}_t &= 0 \\
\operatorname{tr}(\Delta \boldsymbol{D}) &= 0 \quad (\operatorname{div} \Delta \boldsymbol{v} = 0) \\
\Delta \dot{\boldsymbol{S}}_t \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{f}(\Delta \boldsymbol{v}) & \text{on } \Gamma_\sigma \\
\Delta \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} & \text{on } \Gamma_v
\end{aligned} \tag{2.120}$$

を満足しなければならない。Cam-clay モデルの構成式は有効 Cauchy 応力の Jaumann 速度  $\dot{\boldsymbol{T}}'$  とストレッチング  $\boldsymbol{D}$  の関係式で与えられるので、以下は前節と同様な議論が行えるが、ここではそれとは別に後の章で用いやすいように以下の変形を行う。

式 (2.119)<sub>1</sub> の第 1 項を Cauchy 応力の物質時間微分を用いて表すなら、

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{S}}_t' &= \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{T}}' + \boldsymbol{T}' \operatorname{tr} \boldsymbol{D} - \boldsymbol{T}' \boldsymbol{L}^T) \\
&= \dot{T}'_{ij,j} + T'_{ij,j} v_{k,k} + T'_{ij} v_{k,kj} - T'_{ik,j} v_{j,k} - T'_{ik} v_{j,kj} \\
&= \dot{T}'_{ij,j} + T'_{ij,j} v_{k,k} - T'_{ik,j} v_{j,k} = 0
\end{aligned}$$

となり、分岐の直前において、均一変形状態を保っているなら Cauchy 応力  $\boldsymbol{T}$  は均一であるから、式 (2.119)<sub>1</sub> は次式となる。

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{T}}' - \operatorname{grad} \dot{u} = 0 \tag{2.121}$$

ゆえに第 3 章以降の境界値問題においては次式から分岐方程式を定式化する。

増分釣合式

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{T}}' - \operatorname{grad} \dot{u} = 0 \tag{2.121 : 再掲}$$

間隙水の連続式

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{D} = 0 \tag{2.118 : 再掲}$$

境界条件

$$\begin{array}{ll} \dot{S}_t n = \overline{\dot{S}_t} & \text{on } \Gamma_\sigma \\ v = \overline{v} & \text{on } \Gamma_v \end{array} \quad (2.97 : \text{再掲})$$

## 2. 8 結論

本章では，本論文で行う解析上必要となる連続体力学および有限変形論の理論を解説した．次いで本論文で主に取り扱う非共軸 Cam-clay モデルについて解説した．最後に Hill によって与えられた唯一性の十分条件<sup>6)</sup>を説明し，弾塑性体のような非線型固体における分岐の理論を解説した．

## 参考文献（第2章）

- 1) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : Shear bands formation numerically simulated by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.4, pp.1-13, 1989.
- 2) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T. : Soil-water coupled behavior of saturated clay near/at critical state, *Soils and foundations*, Vol.34, No.1, pp.91-105, 1994.
- 3) Asaoka, A. and Noda, T. : Imperfection-sensitive bifurcation of Cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and foundations*, Vol.35, No.1, pp.83-100, 1995.
- 4) Rudnicki, J. W. and Rice, J. R. : Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- 5) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 6) Hill, R. : A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.6, pp.236-249, 1958.
- 7) 社団法人 土木学会 : 土木工学ハンドブック, 第6編固体力学, pp215-254, 技報堂出版, 1989.
- 8) Chadwick, P. : Continuum Mechanics, George Allen and Unwin Ltd., 1976. (後藤学 訳, 連続体力学, ブレイン図書, 1979. )
- 9) Ohta, H. : Analysis of deformations of soils based on the theory of plasticity and its application to settlement of embankments, Doctor Engineering Thesis, Kyoto Univ., 1971.
- 10) Roscoe, K. H., Schofield, A. N. and Thurairajah, A : Yielding of clays in states wetter than critical, *Geotechnique*, Vol.13, pp.211-240, 1963.
- 11) 伊藤耿一 : 塑性不安定と分岐の理論, 塑性と加工 Vol. 22, pp.1009-1015, 1981.



### 第3章 平面ひずみ条件下における分岐解析<sup>1)</sup>

#### 3.1 概説

円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、バルジ型に変形した後、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

そこで本章では、問題の簡略化のため平面ひずみ条件下で共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデル<sup>2)</sup>を用いた長方形供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮および伸張した場合の分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。

これまでに、いくつかの平面ひずみ条件下の分岐解析が行われている。Hill and Hutchinson<sup>3)</sup>らは平面ひずみ条件下で非圧縮性弾塑性体を仮定し、一軸伸張試験における均一な変位場から非均一な変位場への分岐問題に対して定式化し、支配方程式を分類して、分岐条件式の理論解を与えている。また、Young<sup>4)</sup>は Hill and Hutchinson らと同様な手法を用いて、平面ひずみ条件下で非圧縮性弾塑性体の一軸圧縮試験における分岐条件式を与えている。圧縮性の弾塑性構成式を用いた平面ひずみ条件下の分岐解析には Chau and Rudnicki<sup>5)</sup>らが伸張および圧縮試験で、Bardet<sup>6)</sup>が圧縮試験で分岐解析を行っている。

しかしながら最初の二つの研究は対象とする材料は金属であり、Chau and Rudnicki らは岩石を、Bardet は土を対象としている。本論文で対象としている物質は飽和粘土であり土骨格と間隙水の連成された二相体を対象としている。土骨格は圧縮性の構成式でありながら非圧縮性の間隙水と連成する事により、等容変形を仮定できる。これは非排水試験と呼ばれるもので、土質力学では極めて重要な問題である。

また、本章では拡散分岐モードの仮定から得られる速度場より最大せん断ひずみ分布を求め、すべり面の初期発生位置およびその形態を考察する。

### 3. 2 分岐条件式

本章では平面ひずみ状態にある長方形供試体を対象に，均一変形状態から非均一変形状態への分岐現象を考える．分岐の生じる瞬間 $t=t$ で図 3.1 に示すような幅 $2B$ ，高さ $2H$ の長方形供試体になったものとする．座標原点を供試体中央にとり横軸を $x_1$ ，縦軸を $x_2$ とする直交デカルト座標を考える．供試体は圧縮および伸張試験に対応して，軸方向にそれぞれ変位制御で圧縮あるいは伸張する（その際，両端面の全応力を $\sigma_2$ ： $\sigma_2 = \sigma'_2 + u$ とする）．この時，供試体両端面では変形中，変位制御盤との間に摩擦力は働かず水平な速度のギャップは生じるが，制御盤との間に空隙が発生しない固着状態を維持していると仮定する．以後，後者を「固定着の条件」と言う．なお，側方荷重は水圧一定（その際，側面の全応力を $\sigma_1$ ： $\sigma_1 = \sigma'_1 + u$ とする）で与えるものとする．

また，平面ひずみ状態（ $D_{33} = 0$ ）を考える場合， $\sigma'_3 = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2}$ を仮定する．このとき，

平均有効応力 $p' (= -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T}') = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2}{2}$ ，応力差 $\bar{q} = |\sigma_2 - \sigma_1|$ となる．ここで，応力差 $\bar{q}$ は偏差応

力の不変量 $q$ （ $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\|$ ）との間に， $q = \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{q}$ の関係が成り立つ．粘土，砂質土などにお

いては，平均有効応力が大きい程，せん断強度が大きいので，本論文のような均一多軸状態における分岐荷重は軸応力や応力差でなく，応力比が物理的に最も合理的な分岐荷重の定義であると考え．ゆえに，本論文では偏差応力の不変量 $q$ と平均有効応力の $p'$ の比

$\frac{q}{p'} (= \eta)$ をもって「分岐荷重」と呼ぶ．

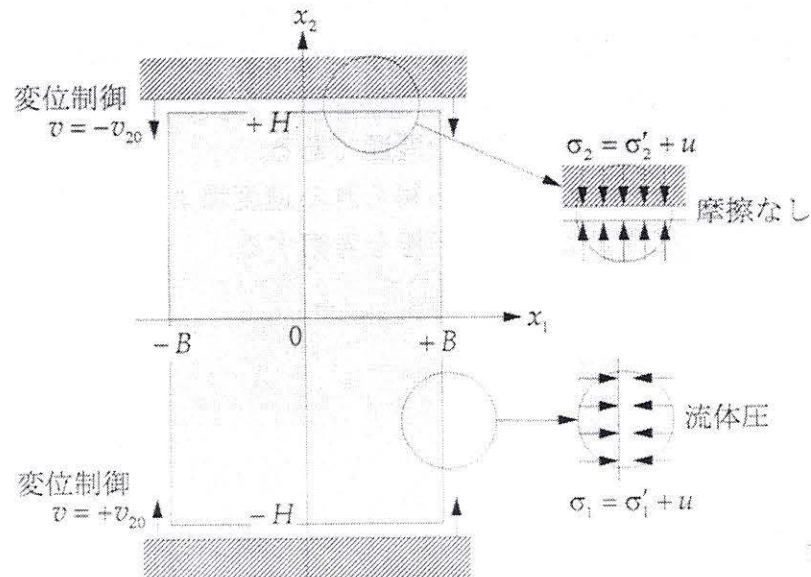


図 3.1 分岐直前の供試体概形

### 3. 2. 1 増分釣合式

平面問題であるから直交デカルト座標を考えると，式 (2.121) の増分釣合式は指標表示を用いると，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} &= 0 \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる．

### 3. 2. 2 境界条件

図 3.1 のように，長方形供試体の側面 ( $x_1 = \pm B$ ) では一定水圧で与え (側圧一定条件)，上下端部 ( $x_2 = \pm H$ ) では摩擦がなく一定速度  $v_{20} > 0$  による変位制御圧縮あるいは伸張とすると圧縮試験の場合，式 (2.97) の境界条件は成分表示を用いると，

$$(\dot{s}_t)_1 = \sigma_1 L_{11}, \quad (\dot{s}_t)_2 = \sigma_1 L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.2)$$

$$(\dot{s}_t)_1 = 0, \quad v_2 = \mp v_{20} \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.3)$$

となる．なお，伸張試験の場合，式 (3.3) <sub>2</sub> は次式で与えられる．

$$v_2 = \pm v_{20} \quad \text{on } x_2 = \pm H$$

まず，側面の境界条件を考える．式 (3.2) <sub>1</sub> は，

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_1 &= \dot{T}'_{11} - \dot{u} - T_{11} L_{11} \\ &= \dot{T}'_{11} - \dot{u} + \sigma_1 L_{11} (= \sigma_1 L_{11}) \end{aligned}$$

となり，すなわち，

$$\dot{T}'_{11} = \dot{u} \quad (3.4)$$

となる．また式 (3.2) <sub>2</sub> は，

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_2 &= \dot{T}'_{21} - T_{22} L_{12} \\ &= \dot{T}'_{21} + \sigma_2 L_{12} (= \sigma_1 L_{12}) \end{aligned}$$

となり，すなわち，

$$\dot{T}'_{21} = -(\sigma_2 - \sigma_1)L_{12} = -\bar{q}L_{12} \quad (3.5)$$

となる．

次いで上下端面の境界条件を考える．式 (3.3) <sub>1</sub> は，

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_1 &= \dot{T}'_{12} - T_{11}L_{21} \\ &= \dot{T}'_{12} + \sigma_1 L_{21} (= 0) \end{aligned}$$

となる．ここで，上下端面においては  $v_{2,1} = 0$ （固定着の条件）であることを考慮すると上式は，

$$\dot{T}'_{12} = 0 \quad (3.6)$$

となる．ゆえに式 (3.2) および式 (3.3) の境界条件はそれぞれ，

$$\dot{T}'_{11} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{21} = -\bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.7)$$

$$\dot{T}'_{12} = 0, \quad v_2 = \mp v_{20} \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.8)$$

となる．なお伸張試験の場合，式 (3.7) <sub>2</sub> は次式で与えられる．

$$\dot{T}'_{21} = \bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B$$

### 3. 2. 3 分岐方程式

分岐方程式が速度に関して線型であるので，速度場の重ね合わせが可能である．ゆえに供試体の変形を均一な変形と非均一な変形からなるものと考えると，増分境界値問題の解は均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる．

均一境界条件

$$\dot{T}'_{11} = 0, \quad \dot{T}'_{21} = 0 \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.9)$$

$$\dot{T}'_{12} = 0, \quad v_2 = \mp v_{20} \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.10)$$

非均一境界条件

$$\dot{T}'_{11} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{21} = -\bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.11)$$

$$\dot{T}'_{12} = 0, \quad v_2 = 0 \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.12)$$

なお、伸張試験では、式 (3.11) <sub>2</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{21} = \bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B$$

この時、均一な変形は増分釣り合い式、境界条件を自動的に満足するため、解くべき分岐方程式は次のようになる。

増分釣り合い式

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{11,1} + \dot{T}'_{12,2} - \dot{u}_{,1} &= 0 \\ \dot{T}'_{21,1} + \dot{T}'_{22,2} - \dot{u}_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1 : \text{再掲})$$

境界条件

$$\dot{T}'_{11} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{21} = -\bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.11 : \text{再掲})$$

$$\dot{T}'_{12} = 0, \quad v_2 = 0 \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.12 : \text{再掲})$$

なお、伸張試験の場合、式 (3.11) <sub>2</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{21} = \bar{q}L_{12} \quad \text{on } x_1 = \pm B$$

このことは、式 (2.120) で説明したことと同じであり均一変形の解と非均一変形の解の差  $(\Delta\dot{S}_i, \Delta v)$  を新たに  $(\dot{S}_i, v)$  と置き換えたものに他ならない。

### 3. 2. 4 構成式

水—土骨格連成を考慮すると、間隙水の連続式より、

$$\text{tr } \mathbf{D} = 0 \quad (3.13)$$

の条件が得られる (Appendix B) . 式 (3.13) を考慮すると、平面ひずみ条件 ( $D_{33} = 0$ ) であるから、式 (2.86) は次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11} &= 2\mu^*(D_{22} - D_{11}) \\ \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで、 $\mu^*$ 、 $\mu$  はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数、単純せん断係数で、次式で

与えられる.

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{\tilde{h}_1\tilde{G}}{\tilde{h}_1 + \tilde{G}}. \quad (3.15)$$

式 (3.14) に  $\dot{T}' = \dot{T}' - WT + TW$  を代入すると,

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11} &= 2\mu^*(D_{22} - D_{11}) \\ \dot{T}'_{12} &= 2\mu D_{12} - \bar{q}W_{12} \end{aligned} \quad (3.16)$$

となり, 速度  $v$  を用いて表すと,

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11} &= 2\mu^*(v_{2,2} - v_{1,1}) \\ \dot{T}'_{12} &= \mu(v_{1,2} + v_{2,1}) - \frac{1}{2}\bar{q}(v_{1,2} - v_{2,1}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる.

### 3. 2. 5 流れ関数の導入

式 (3.13) より, 平面ひずみ ( $D_{33} = 0$ ) を考慮し,

$$v_1 = \psi_{,2}, \quad v_2 = -\psi_{,1} \quad (3.18)$$

なる流れ関数を導入すると, 式 (3.17) の構成式は,

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11} &= -4\mu^*\psi_{,12} \\ \dot{T}'_{12} &= (\mu - \frac{\bar{q}}{2})\psi_{,22} - (\mu + \frac{\bar{q}}{2})\psi_{,11} \end{aligned} \quad (3.19)$$

となる.

式 (3.1) の増分釣合式から,  $\dot{u}$  の項を消去すると次式を得る.

$$\dot{T}'_{12,11} - \dot{T}'_{12,22} + (\dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11})_{,12} = 0 \quad (3.20)$$

上式に式 (3.19) を代入すると,

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (3.21)$$

となり，ここで  $a$ ， $b$ ，および  $c$  は次式で与えられる．

$$a = 2\mu + \bar{q}, \quad b = -(4\mu^* - 2\mu), \quad c = 2\mu - \bar{q} \quad (3.22)$$

式 (3.1)<sub>2</sub> の増分釣合式を変形すると，

$$\left\{ \frac{1}{2}(\dot{T}'_{11} + \dot{T}'_{22}) - \dot{u} \right\}_{,2} = -\dot{T}'_{21,1} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11})_{,2} \quad (3.23)$$

となり，また，式 (3.19)<sub>1</sub> の構成式より，

$$\frac{1}{2}(\dot{T}'_{22} - \dot{T}'_{11})_{,2} = -2\mu^*\psi_{,122} \quad (3.24)$$

であるから，式 (3.23) と式 (3.24) の辺々を減じると，

$$2(\dot{T}'_{11} - \dot{u})_{,2} = a\psi_{,111} - c\psi_{,122} + 8\mu^*\psi_{,122} (= 0) \quad (3.25)$$

となる．ゆえに流れ関数を用いると，式 (3.11)<sub>1</sub> の側面の境界条件は，

$$a\psi_{,111} - (2b - a)\psi_{,122} = 0 \quad (3.26)$$

となる．また，式 (3.11)<sub>2</sub> に流れ関数を用いると，

$$\left(\mu - \frac{\bar{q}}{2}\right)\psi_{,22} - \left(\mu + \frac{\bar{q}}{2}\right)\psi_{,11} = -\bar{q}\psi_{,22} \quad (3.27)$$

であるからと，式 (3.11)<sub>2</sub> の側面の境界条件は，

$$\psi_{,11} - \psi_{,22} = 0, \quad (a \neq 0) \quad (3.28)$$

となる．

式 (3.12)<sub>2</sub> の上下端面の境界条件は流れ関数を用いると，

$$\psi_{,1} = 0 \quad (3.29)$$

となる．また式 (3.12) <sub>1</sub> の上下端面の境界条件は流れ関数を用いると，

$$c\psi_{,22} - a\psi_{,11} = 0 \quad (3.30)$$

となり，式 (3.29) を用いると，

$$\psi_{,22} = 0, \quad (c \neq 0) \quad (3.31)$$

となる．ゆえに流れ関数を用いた分岐方程式は次のようになる．

増分釣合式

$$a\psi_{,1111} - 2b\psi_{,1122} + c\psi_{,2222} = 0 \quad (3.21 : \text{再掲})$$

境界条件

$$a\psi_{111} - (2b - a)\psi_{,122} = 0 \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.26 : \text{再掲})$$

$$\psi_{,11} - \psi_{,22} = 0, \quad (a \neq 0) \quad \text{on } x_1 = \pm B \quad (3.28 : \text{再掲})$$

$$\psi_{,22} = 0, \quad (c \neq 0) \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.31 : \text{再掲})$$

$$\psi_{,1} = 0, \quad (a \neq 0) \quad \text{on } x_2 = \pm H \quad (3.29 : \text{再掲})$$

流れ関数は式 (3.29) と式 (3.31) より次式のように仮定できる．

$$\psi = V(x_1)\cos(k_mx_2), \quad (k_m = \frac{m\pi}{2H}) \quad (3.32)$$

ただし，変形モードを示す整数  $m$  が偶数のとき， $x_2$  座標の原点を  $\frac{H}{m}$  だけ移動させる必要がある．また， $V(x_1)$  は次の支配方程式を満足しなければならない．

$$(aD^4 + 2bk_m^2 D^2 + ck_m^4)V(x_1) = 0 \quad (3.33)$$

ここで， $D^k$  は微分演算子であり， $k$  は  $x_1$  での微分の回数を表わしている．また， $a$ ， $b$ ，および  $c$  は式 (3.22) と同様である．



上下端面の境界条件は式 (3.32) のようにおけば自動的に満足されるので，側面の境界条件について考える．式 (3.26) と式 (3.28) はそれぞれ，

$$aV_{,111} + (2b - a)k_m^2 V_{,1} = 0 \quad (3.34)$$

$$V_{,11} + k_m^2 V = 0 \quad (3.35)$$

となる．

### 3. 2. 6 支配方程式の分類

式 (3.21) の支配方程式は次のように変形できる．

$$(D^2 + k_m^2 \rho^2)(D^2 + k_m^2 \bar{\rho}^2)V(x_1) = 0 \quad (3.36)$$

ここで， $\rho^2$ ， $\bar{\rho}^2$ は次式で与えられる．

$$\rho^2, \bar{\rho}^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (3.37)$$

これは，次式のような4次方程式の根である．

$$a\rho^4 - 2b\rho^2 + c = 0 \quad (3.38)$$

ここで， $a$ ， $b$ ，および $c$ は式 (3.22) と同様である．また式 (3.36) より， $V(x_1)$ の一般解の形は，

$$V(x_1) = \sum_{j=1}^4 c_j \exp(i\rho_j k_m x_1) \quad (3.39)$$

となり， $c_j$  ( $j=1, \sim, 4$ ) は未定定数， $i$ は $i=\sqrt{-1}$ なる虚数単位である．

$a$ ， $b$ ，および $c$ は，供試体内の応力の変化にともない変化するので式 (3.38) の実数解の存在個数が異なり，実数解の存在個数が 0，2 および 4 個に対応して，支配方程式はそれぞれ楕円型 (E)，放物型 (P)，および双曲型 (H) に分類される．なお，楕円領域はさらに二つの領域に分類でき 4 つの複素数解の場合を (EC)，4 つの虚数解の場合を (EI) とする．それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} < 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| & \text{EI 領域} \\
b^2 - ac < 0 & \text{EC 領域} \\
b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} > 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| & \text{H 領域} \\
2\mu < |\bar{q}| & \text{P 領域}
\end{aligned}$$

### 3. 2. 7 分岐条件式

#### 3. 2. 7. 1 EC 領域の分岐条件式

EC 領域では、式 (3.38) における根は、共役な複素数であり、 $P \pm iQ$ 、 $-P \pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) とおくと  $P$ 、 $Q$  の間には次の関係式が成り立つ (Appendix C) .

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (3.40)$$

ここで、対称モード  $\psi(x_1, x_2) = -\psi(-x_1, x_2)$  を考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となる.

$$V(x_1) = \Re[A \sin(\rho k_m x_1)] \quad (3.41)$$

ここで、 $\Re[\dots]$  は  $[\dots]$  の実数部分を表わす. また、 $A$  は複素定数で、 $\rho = P + iQ$  は式 (3.38) の複素数根である. 同様に非対称モード  $\psi(x_1, x_2) = \psi(-x_1, x_2)$  を考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となる.

$$V(x_1) = \Re[A \cos(\rho k_m x_1)] \quad (3.42)$$

ここで、式 (3.41) あるいは式 (3.42) を式 (3.34) , 式 (3.35) に代入することにより、次の分岐条件式がそれぞれ導かれる (Appendix D) .

$$\frac{Q \sin(2Pk_m B)}{P \sinh(2Qk_m B)} = \pm \frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}} \quad (3.43)$$

#### 3. 2. 7. 2 EI 領域の分岐条件式

EI 領域では、式 (3.38) における根は虚数であり  $\pm iP$ 、 $\pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $P < Q$ ) とおくと  $P$ 、 $Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a} \quad (3.44)$$

ここで、対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となり、

$$V(x_1) = A_1 \sinh(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1) \quad (3.45)$$

また、非対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となる。

$$V(x_1) = A_1 \cosh(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1) \quad (3.46)$$

分岐条件式は対称モードの場合は次のように得られ、

$$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tanh(Pk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2} \quad (3.47)$$

非対称モードの場合は次のように得られる。

$$\frac{P \tanh(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = \frac{(1 + P^2)^2}{(1 + Q^2)^2} \quad (3.48)$$

### 3. 2. 7. 3 P 領域の分岐条件式

P 領域では、式 (3.38) における根のうち実数解を  $\pm P$ 、虚数解を  $\pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) とおくと  $P$ 、 $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (3.49)$$

ここで、対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となり、

$$V(x_1) = A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sinh(Qk_m x_1) \quad (3.50)$$

また、非対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となる。

$$V(x_1) = A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cosh(Qk_m x_1) \quad (3.51)$$

分岐条件式は対称モードの場合は次のように得られ,

$$\frac{P \tanh(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1+Q^2)^2} \quad (3.52)$$

非対称モードの場合は次のように得られる.

$$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tanh(Qk_m B)} = -\frac{(1-P^2)^2}{(1+Q^2)^2} \quad (3.53)$$

### 3. 2. 7. 4 H 領域の分岐条件式

H 領域では, 式 (3.38) における根は実数であり  $\pm P$ ,  $\pm Q$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $P > Q$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a} \quad (3.54)$$

ここで, 対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となり,

$$V(x_1) = A_1 \sin(Pk_m x_1) + A_2 \sin(Qk_m x_1) \quad (3.55)$$

また, 非対称モードを考えると  $V(x_1)$  の一般解は次式となる.

$$V(x_1) = A_1 \cos(Pk_m x_1) + A_2 \cos(Qk_m x_1) \quad (3.56)$$

分岐条件式は対称モードの場合は次のように得られ,

$$\frac{P \tan(Qk_m B)}{Q \tan(Pk_m B)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1-Q^2)^2} \quad (3.57)$$

非対称モードの場合は次のように得られる.

$$\frac{P \tan(Pk_m B)}{Q \tan(Qk_m B)} = \frac{(1-P^2)^2}{(1-Q^2)^2} \quad (3.58)$$

### 3. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比

前節では平面ひずみ状態にある長方形供試体の側水圧一定条件下での分岐荷重の理論解を与える分岐条件式を導いた。本節では得られた分岐荷重の解析結果を示し、その物理的考察を行う。

解析にあたって、用いる土質パラメータは関口<sup>7)</sup> (1977) の三軸試験の結果より、次の値を用いるものとする。

$$\lambda = 0.231, \quad \kappa = 0.042, \quad \nu = 0.333, \quad M = 1.430, \quad e = 1.5$$

また、非共軸モデルの場合、非共軸パラメータ  $A$  の値については、

$$A = 0.01$$

を用いる。ゆえに、本解析結果は試行的なものであるが、いずれにしても非共軸項のない共軸モデルでは、実際現象を説明できない実例が多々あることが分かってきている。

分岐条件式は、分岐荷重  $\frac{q}{p'}$ ，分岐時の供試体寸法比  $\frac{B}{H}$ ，変形モード  $m$ ，非共軸パラメータ  $A$  の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、「分岐荷重」と「供試体寸法比」の関係が得られる。ただし、得られた関係は各供試体寸法比に対して最も低い「分岐荷重」を考えている。一般に分岐モードは相対的に安定度が大きく実現しやすい。この観点から、より高い分岐荷重はここでは割愛する。

図 3.2 から図 3.4 に共軸 Cam-clay モデルの、図 3.5 から図 3.7 に非共軸 Cam-clay モデルの分岐荷重と供試体寸法比の関係を示す。

共軸モデルに比べて非共軸モデルの分岐荷重は低くなる傾向にあるのが分かる。このことから非共軸項には分岐の促進効果が含まれていることが分かる。

共軸モデルでは高次の変形モードになるにつれ分岐荷重が高くなる傾向にある。一方、非共軸モデルでは高次の変形モードの分岐荷重が低次の分岐荷重より必ずしも高くなく高次になるにつれ一定値に近づく傾向にある。この事は低次の変形モード（対称バルジや非対称座屈など）も高次の変形モード（せん断ひずみの局所化の結果として考えられる網目状のすべり面群など）も、ほぼ同一の分岐荷重で生じることができることを示す。またこの結果変形モードの遷移などの説明も可能になる。

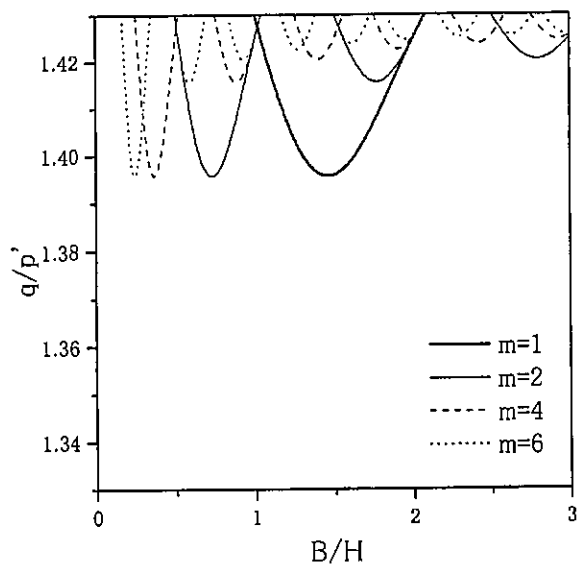


図 3.2 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(共軸 Cam-clay モデル, 対称モード)

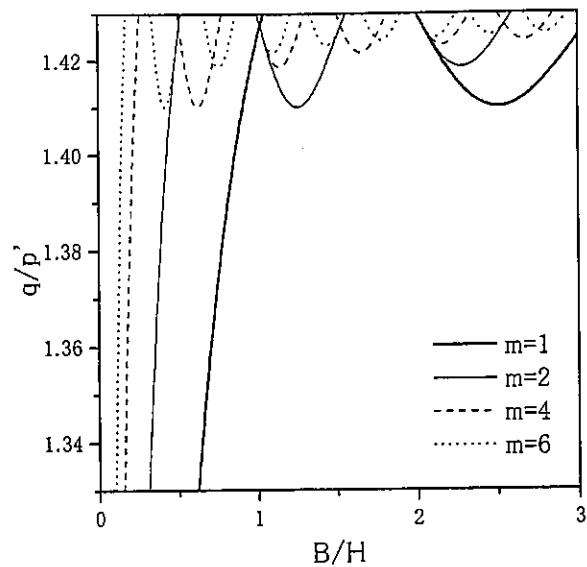


図 3.3 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(共軸 Cam-clay モデル, 非対称モード)

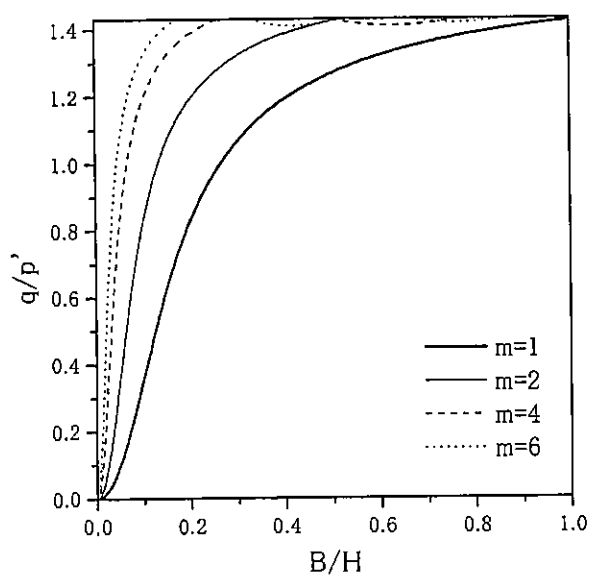


図 3.4 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(共軸 Cam-clay モデル, 非対称モード)

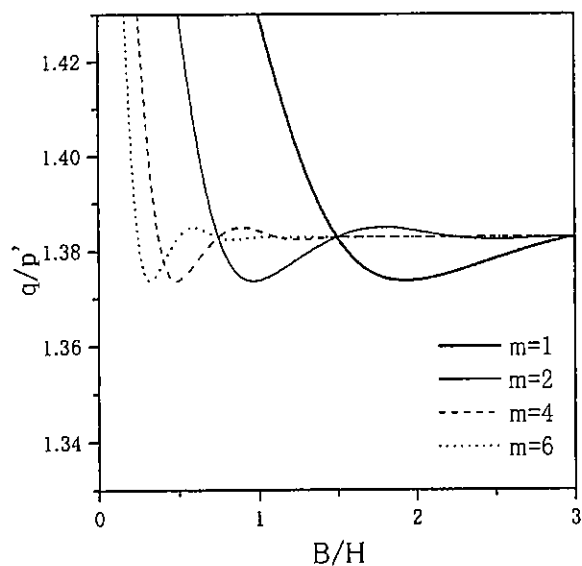


図 3.5 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(非共軸 Cam-clay モデル, 対称モード)

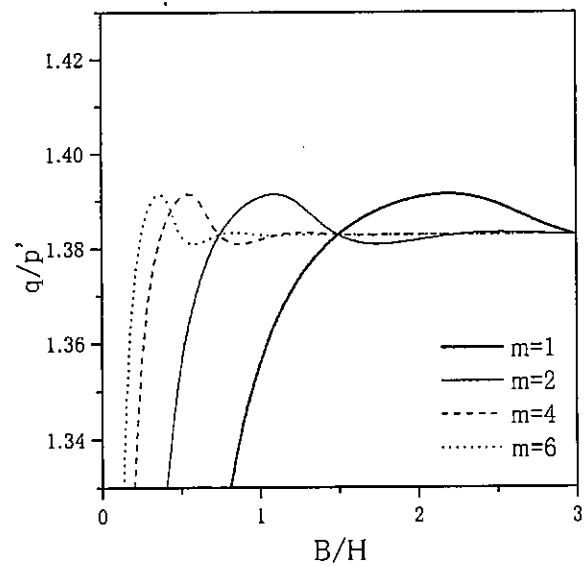


図 3.6 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(非共軸 Cam-clay モデル, 非対称モード)

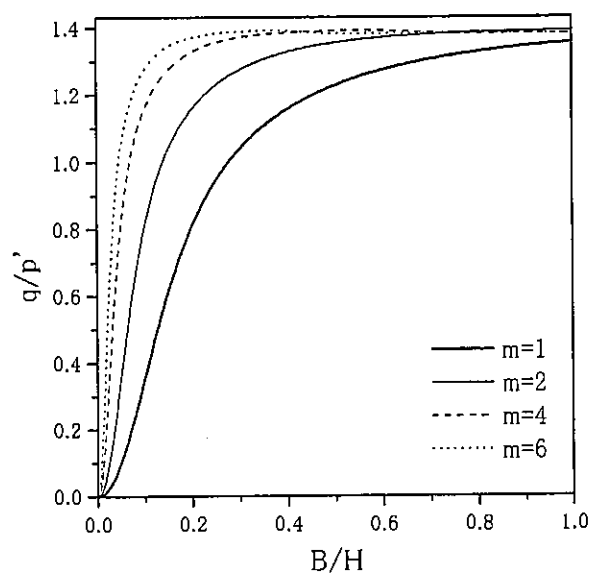


図 3.7 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(非共軸 Cam-clay モデル, 非対称モード)

### 3. 4 最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察

#### 3. 4. 1 最大せん断ひずみ

初期において長さ  $\ell_0$  の部分が分岐直前には  $\ell$  になり分岐直後には  $\ell + \Delta\ell$  になったとする。ただし、本分岐解においては、 $\Delta\ell$  の大きさは不定であり、物体各点においては相対的な大きさの比較のみに意味があることに注意。  $D_{rr}$  等も同様である。

分岐後の主対数ひずみは、

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \ln \frac{\ell + \Delta\ell}{\ell_0} \\ &= \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \ln \left(1 + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\end{aligned}$$

となる。上式は、 $x \ll 1$  なら  $\ln(1+x) \approx x$  であるから、 $\Delta\ell/\ell \ll 1$  のとき、 $\varepsilon$  は次式で近似できるので、

$$\varepsilon \approx \ln \frac{\ell}{\ell_0} + \frac{\Delta\ell}{\ell} \quad (3.59)$$

となる。式 (3.59) より、 $\varepsilon_{ij}$  を分岐直前の一様ひずみ  $(\varepsilon)_\ell$  と変形速度を用いて表すと、

$$\varepsilon_{ii} \approx (\varepsilon_{ii})_\ell + D_{ii} \Delta t \quad (i: \text{nosum}) \quad (3.60)$$

また、分岐直前のせん断ひずみは 0 であることより、

$$\varepsilon_{ij} \approx D_{ij} \Delta t \quad (i \neq j) \quad (3.61)$$

となる。ここで、 $\varepsilon_{ij}$  の主値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ) とおき、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  を次式のように定義する。

$$\Gamma_{\max} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \quad (3.62)$$

#### 3. 4. 2 すべり面の発生位置およびその形状

平面ひずみ状態にある非共軸 Cam-clay モデルを用いた長方形供試体の最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布を式 (3.62) より求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。通常、粘土のすべり面は、破壊力学の用語で言えばモードⅡ型またはモードⅢ



型（せん断型）の進行性破壊であるので，ここでは，上記の最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置と仮定して議論する．図 3.8 から図 3.10 に分岐解の速度場を用いて得られた変形モード概形図および最大せん断ひずみ図を示す．図番号の (a) は分岐解の変形モード概形図，(b) は最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布図で，色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく，薄い部分で小さいことを示している．なお変形モード図は分岐解である非均一速度場による変形のみを表しており，実際の変形図は，すべての領域で負荷となる自明な均一速度場の変形を加える必要がある．

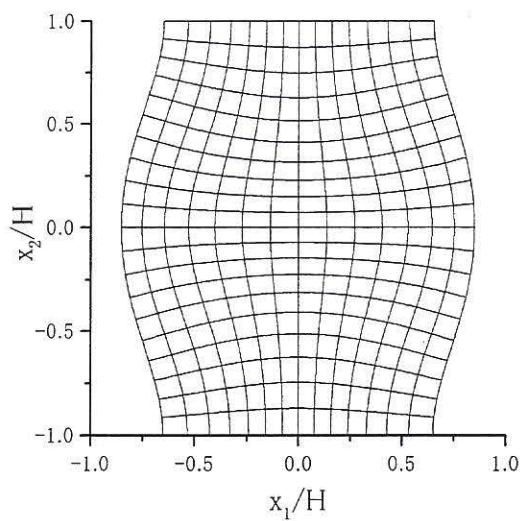
図 3.8 に対称モード， $m=2$ ， $B/H=0.75$  の場合を示す．変形モード概形は図 3.8(a) のようになる．これは一般にバルジと呼ばれるような中央部が膨らむ変形の例である．最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布は図 3.8(b) のようになる．図 3.8(b) では，最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の卓越する位置は供試体中央となっている．したがって，この供試体寸法比では供試体中央から最もすべり面が発生しやすいと考えられる．

図 3.9 に非対称モード， $m=1$ ， $B/H=0.5$  の場合を示す．変形モード概形は図 3.9(a) のようになる．これは一般に座屈と呼ばれるような変形の例である．最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布は図 3.9(b) のようになる．図 3.9(b) では，最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の卓越する位置は供試体左側上部と右側下部になっている．したがって，この供試体寸法比では供試体の右側上部，および左側下部から最もすべり面が発生しやすいと考えられる．

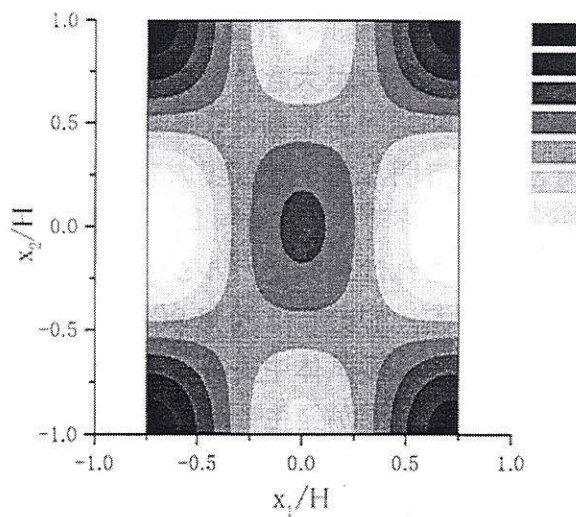
図 3.10 に対称モード， $m=10$ ， $B/H=0.75$  の場合を示す．変形モード概形は図 3.10(a) のようになる．この変形モードの場合の最大せん断ひずみの分布は図 3.10(b) のようになり，最大せん断ひずみの卓越する点を結ぶことによって，網目状のすべり面群と思われるすべり面が供試体側面近傍に生成される．このことから網目状のすべり面群は高次の変形モードの分岐の結果と考えることができる．

ただし，実際には，本章概説で述べたように，すべり面は，何らかの非均一（分岐モード）変形後，「非軸対称」的に進行するのが普通であるが，以上の議論は均一変形している途中で「拡散分岐モード (Diffuse bifurcation mode)」の出現した場合において，速度勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使って，初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである．

なお，すべり面発生の考察として，双曲型または放物型における速度勾配の不連続面で定義される「せん断帯モード (Shear band mode)」発生の必要条件に基づいた議論も数多く行なわれているが，その条件では，せん断帯モードとしてのすべり面の発生する応力状態やその方向は議論できるが，境界条件に無関係な局所的な理論であるため，本分岐解のように，特定の供試体形状におけるすべり面の発生位置までは議論できない．

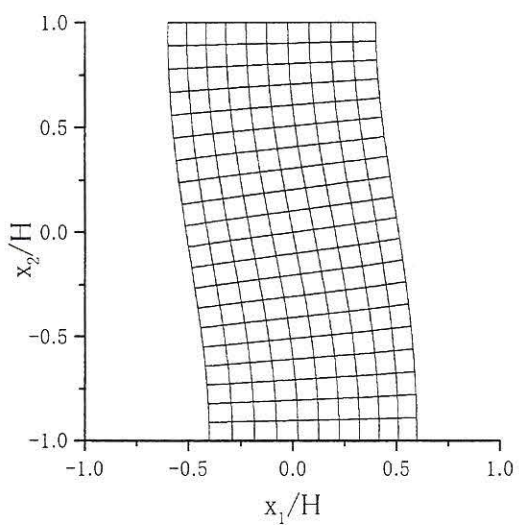


(a)

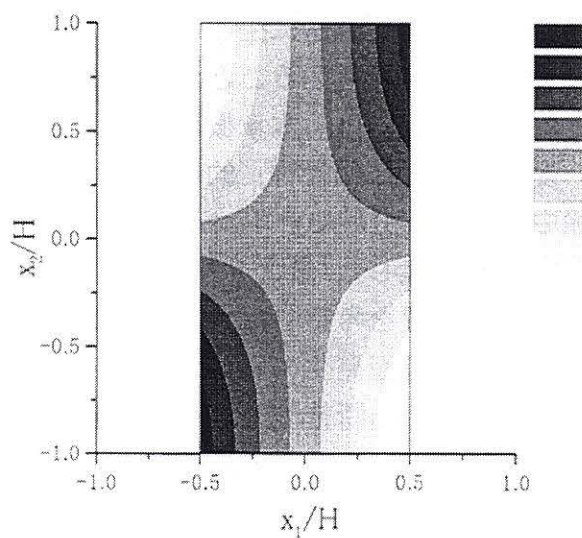


(b)

図 3.8 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(対称モード,  $m = 2$ ,  $B/H = 0.75$ )

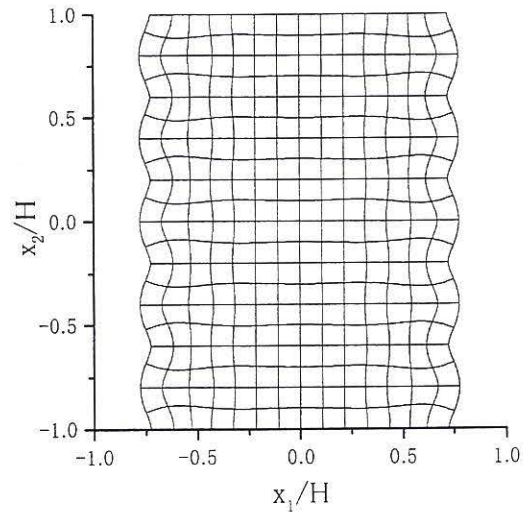


(a)

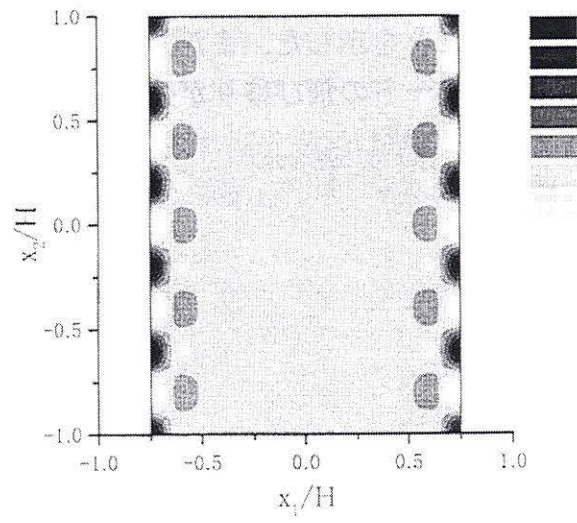


(b)

図 3.9 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(非対称モード,  $m = 1$ ,  $B/H = 0.5$ )



(a)



(b)

図 3.10 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(対称モード,  $m = 10$ ,  $B/H = 0.75$ )

### 3. 5 結論

本章では，平面ひずみ条件下で，共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-lay モデルを用いた長方形供試体変形の分岐解析を行うことにより，まず，分岐条件式の解析解を求め，分岐荷重と変形モードとの関係を議論した．次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより，すべり面の発生位置について考察した．その結果次のような結論を得た．

- (1) 非共軸項には分岐の促進効果が含まれていることがわかった．
- (2) 非共軸モデルを用いれば，高次の変形モードの分岐荷重が低次の分岐荷重より必ずしも高くなく高次になるにつれ一定値に近づく傾向にあり，このことから，低次の変形モード（対称バルジや非対称座屈など）も高次の変形モード（せん断ひずみの局所化の結果として考えられる網目状のすべり面群など）も，ほぼ同一の分岐荷重で生じることができることを示せた．
- (3) (2) の結果は，変形モードの飛び移り現象などの説明も可能になる．
- (4) 高次変形モードの分岐現象の結果として，周期的なすべり面群が供試体側面近傍に生成される事が説明できることを示した．また，(2) の結果よりそのまま圧縮変形を続けてゆけば，（変形モードの飛び移りが生じ，）すべり面群が見えなくなるという実現象も説明できた．

### 参考文献（第3章）

- 1) 加藤泰寛, 矢富盟祥, 石田啓: 平面ひずみ非排水試験の分岐解析とすべり面の発生機構, 土木学会第48回年次学術講演会講演概要集, 第III部, pp. 32-33, 1993.
- 2) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 3) R. Hill and W. Hutchinson, Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23, pp. 239-264, 1975.
- 4) N. J. B. Young: Bifurcation phenomena in the plane compression test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 24, pp. 77-91, 1976.
- 5) K. T. Chau and W. Rudnicki: Bifurcations of compressible pressure-sensitive materials in plane strain tension and compression, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 38, pp. 875-898, 1990.
- 6) J. P. Bardet: Analytical solutions for the plane-strain bifurcation of compressible solids, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 651-657, 1991.
- 7) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, *Proc. 9th ICSFME*, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.

## 第4章 円柱供試体の軸対称分岐解析<sup>1)</sup>

### 4. 1 概説

本章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデル<sup>2)</sup>を用いた円柱供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮および伸張した場合に、問題の簡略化のため変形を軸対称変形に限定して分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。

これまでに行われてきた円柱供試体の軸対称分岐解析には、Cheng et al.<sup>3)</sup>と Chau<sup>4)</sup>の報告がある。

しかしながら Cheng et al.の報告は弾塑性体の場合の分岐条件式に多くの誤りがあり、得られた式の物理的考察は、供試体寸法比などの極限の場合を除いて何も議論されていない。また、Chau の報告では、岩石を意図した非関連流動則、横等方性を含む非常に一般的な構成式の場合で、圧縮変形する場合の分岐条件式が、応力速度ポテンシャルを用いて得られている。しかし、構成式における物質係数が、具体的な関数関係が与えられていない一般的なものであるため、分岐荷重と分岐モードの関係を議論する際、分岐荷重として、軸応力を（弾塑性体では応力の関数である）縦せん断係数（45度せん断係数）で無次元化したものを採用し、更に（一般には応力の関数である）縦せん断係数と単純せん断係数の比を定数とみなし、その値を変えた結果に基づいて考察を行なっている。したがって、分岐荷重と分岐モードの関係として、物理的な意味が不明瞭なものになっている。本論文で対象としている物質は飽和粘土であり土骨格と間隙水の連成された二相体を対象としている。土骨格は圧縮性の構成式でありながら非圧縮性の間隙水と連成する事により、等容変形を仮定できる、これは非排水試験と呼ばれるもので、土質力学では極めて重要な問題である。

また、本章においても拡散分岐モードの仮定から得られる速度場より最大せん断ひずみ分布を求め、すべり面の初期発生位置およびその形態を考察する。

## 4. 2 分岐条件式

本章では円柱供試体の均一変形状態から非均一変形状態への軸対称分岐現象を考える。分岐の生じる瞬間  $t = t$  で図 4.1 に示すような半径  $R$ 、高さ  $2H$  の円柱供試体になったものとする。座標原点を供試体中央にとり、対称軸が  $z$  軸に一致するような円柱座標  $(r, \theta, z)$  を考える。供試体は圧縮および伸張試験に対応して、軸方向にそれぞれ変位制御で圧縮あるいは伸張する（その際、両端面では固定着の条件および摩擦なしを仮定し、両端面の全応力を  $\sigma_a : \sigma_a = \sigma'_a + u$  とする）。また、側方荷重は水圧一定（その際、側面の全応力を  $\sigma_b : \sigma_b = \sigma'_b + u$  とする）で与えるものとする。そのとき円周方向の全応力も  $\sigma_b$  となる。

この時、平均有効応力は  $p' (= -\frac{1}{3} \text{tr} T') = \frac{\sigma'_a + 2\sigma'_b}{3}$ 、応力差は  $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|S\| = |\sigma_a - \sigma_b|$  となる。本章においても、前章で述べた理由により偏差応力の不変量  $q$  と平均有効応力の  $p'$  の比  $\frac{q}{p'} (= \eta)$  をもって「分岐荷重」と呼ぶ。

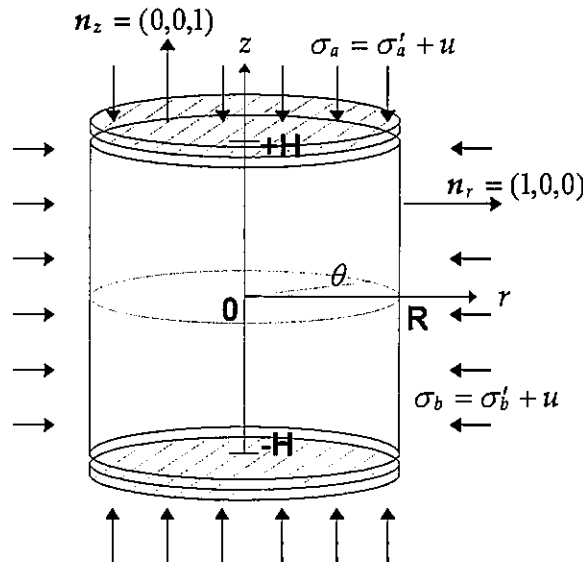


図 4.1 分岐直前の円柱供試体概形図

### 4. 2. 1 増分釣合式

軸対称問題であるから、式 (2.121) の増分釣合式は円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いると、

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}'_{zr,r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる。

#### 4. 2. 2 境界条件

図 4.1 のように、円柱供試体の側面 ( $r = R$ ) では一定水圧であたえ (側圧一定条件), 上下端部 ( $z = \pm H$ ) では摩擦がなく一定速度  $w_0 > 0$  による変位制御圧縮あるいは伸張とすると圧縮試験の場合, 式 (2.97) の境界条件は成分表示を用いると,

$$(\dot{s}_t)_r = \sigma_b L_{rr}, \quad (\dot{s}_t)_z = \sigma_b L_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (4.2)$$

$$(\dot{s}_t)_r = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.3)$$

となる。なお、伸張試験の場合, 式 (4.3) <sub>2</sub> は次式で与えられる。

$$v_z = \pm w_0 \quad \text{on } z = \pm H$$

まず、側面の境界条件を考える。式 (4.2) <sub>1</sub> は,

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} - T_{rr} L_{rr} \\ &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} + \sigma_b L_{rr} (= \sigma_b L_{rr}) \end{aligned}$$

となり、すなわち,

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u} \quad (4.4)$$

となる。また式 (4.2) <sub>2</sub> は,

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_z &= \dot{T}'_{rz} - T_{zz} L_{rz} \\ &= \dot{T}'_{rz} + \sigma_a L_{rz} (= \sigma_b L_{rz}) \end{aligned}$$

となり、すなわち,

$$\dot{T}'_{rz} = -(\sigma_a - \sigma_b) L_{rz} = -q L_{rz} \quad (4.5)$$

となる。

次いで、上下端面の境界条件を考える。式 (4.3) <sub>1</sub> は,



$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rz} - T_{rr}L_{zr} \\
&= \dot{T}'_{rz} + \sigma_b L_{zr} (=0)
\end{aligned}$$

となる．ここで，上下端においては $v_{z,r}=0$ （固定着の条件）であることを考慮すると上式は，

$$\dot{T}'_{rz} = 0 \quad (4.6)$$

となる．ゆえに，式（4.2）および式（4.3）の境界条件はそれぞれ，

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (4.7)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.8)$$

となる．なお伸張試験の場合，式（4.7）<sub>2</sub>は次式で与えられる．

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R$$

#### 4. 2. 3 分岐方程式

分岐方程式が速度に関して線型であるので，速度場の重ね合わせが可能である．ゆえに供試体の変形を均一な変形と非均一な変形からなるものと考えると，増分境界値問題の解は均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる．

均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = 0 \quad \text{on } r = R \quad (4.9)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.10)$$

非均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (4.11)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.12)$$

なお，伸張試験では，式（4.11）<sub>2</sub>は次式で与えられる．

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R$$

この時，均一な変形は増分釣り合い式，境界条件を自動的に満足するため，解くべき分岐方程式は次のようになる．

増分釣合式：

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{rr,r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}'_{zr,r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} &= 0\end{aligned}\quad (4.1 : \text{再掲})$$

境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (4.11 : \text{再掲})$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.12 : \text{再掲})$$

なお，伸張試験の場合，式 (4.11)<sub>2</sub> は次式で与えられる．

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = \pm R$$

#### 4. 2. 4 構成式

水－土骨格連成を考慮すると，間隙水の連続式より，

$$\text{tr } \mathbf{D} = 0 \quad (4.13)$$

の条件を得る．式 (4.13) を考慮すると式 (2.86) は次式のように変形できる．

$$\begin{aligned}\dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz}\end{aligned}\quad (4.14)$$

ここで， $\mu^*$ ， $\mu$  はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数，単純せん断係数で，次式で与えられる．

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{\tilde{h}_1\tilde{G}}{\tilde{h}_1 + \tilde{G}} \quad (4.15)$$

式 (4.14) に  $\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$  を代入すると，

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\
\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\
\dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} - qW_{rz}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

となり，速度  $v$  を用いて表すと，

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{v_{z,z} - \frac{1}{2}(v_{r,r} + \frac{1}{r}v_r)\} \\
\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(v_{r,r} - \frac{1}{r}v_r) \\
\dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r})
\end{aligned} \tag{4.17}$$

となる．

#### 4. 2. 5 速度場の導入

増分釣合式から， $\dot{u}$  の項を消去すると速度成分の未知関数  $v_r, v_z$  を用いて次式が導ける．以下，圧縮の場合の式のみ示すが伸張試験の場合は， $q$  の代わりに  $-q$  と置き換えればよい．

$$(2\mu + q) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right\} \right] + 6(\mu^* - \mu) \frac{\partial^3 v_z}{\partial r \partial z^2} + (2\mu - q) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0 \tag{4.18}$$

式 (4.13) より  $v_z$  は  $v_r$  を用いて次式のように表わすことができる．

$$v_{z,z} = -\frac{1}{r}(rv_r)_{,r} \tag{4.19}$$

式 (4.19) を用いて，式 (4.18) から  $v_z$  の項を消去すると次式となる．

$$a \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) \right\} \right] - 2b \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right\} + c \frac{\partial^4}{\partial z^4} v_r = 0 \tag{4.20}$$

ここで， $a, b$ ，および  $c$  は次式で与えられる．

$$a = 2\mu + q, \quad b = -(3\mu^* - \mu), \quad c = 2\mu - q \tag{4.21}$$

式 (4.1) <sub>2</sub> の増分釣合式を変形すると,

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = -\dot{T}'_{zr,r} - \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta})_{,z} \quad (4.22)$$

となり, 式 (4.17) を代入することにより次式が得られる.

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = -(\mu - \frac{q}{2})(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z}) - (\mu + \frac{q}{2})(v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r}) + \mu(v_{r,rz} - \frac{1}{r}v_{r,z}) \quad (4.23)$$

また, 式 (4.17) <sub>1</sub> の構成式より,

$$\{\dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta})\}_{,z} = 2\mu^* \{v_{z,zz} - \frac{1}{2}(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z})\} \quad (4.24)$$

であるから, 式 (4.23) と式 (4.24) の辺々を減じることによって, 次式が得られる.

$$(\dot{T}'_{rr} - \dot{u})_{,z} = -2\mu^* \{v_{z,zz} - \frac{1}{2}(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z})\} - (\mu - \frac{q}{2})(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z}) - (\mu + \frac{q}{2})(v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r}) + \mu(v_{r,rz} - \frac{1}{r}v_{r,z}) \quad (4.25)$$

ゆえに, 式 (4.11) <sub>1</sub> の側面の境界条件は次式となる.

$$2\mu^* \{v_{z,zz} - \frac{1}{2}(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z})\} + (\mu - \frac{q}{2})(v_{r,rz} + \frac{1}{r}v_{r,z}) + (\mu + \frac{q}{2})(v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r}) - \mu(v_{r,rz} - \frac{1}{r}v_{r,z}) = 0 \quad (4.26)$$

式 (4.19) を用いて上式から  $v_z$  の項を消去すると次式となる.

$$(2b-a)\{\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\}_{,zz} - a\frac{1}{r}(r(\frac{1}{r}(rv_r)_{,r})_{,r})_{,r} + (a+c)\frac{1}{r}v_{r,zz} = 0 \quad (4.27)$$

次いで, 式 (4.11) <sub>2</sub> の側面の境界条件は,

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}q)v_{r,z} + (\mu + \frac{1}{2}q)v_{z,r} (= -qv_{r,z}) \end{aligned}$$

と変形でき, すなわち,

$$v_{r,z} + v_{z,r} = 0, \quad (a \neq 0) \quad (4.28)$$

となる. 式 (4.19) を用いて上式から  $v_z$  の項を消去すると次式となる.

$$\left(\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\right)_{,r} - v_{r,zz} = 0 \quad (4.29)$$

また, 式 (4.12)<sub>1</sub> の上下面の境界条件は,

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\ &= (\mu - \frac{1}{2}q)v_{r,z} + (\mu + \frac{1}{2}q)v_{z,r} (= 0) \end{aligned}$$

と変形でき,  $v_{z,r} = 0$  (固定着の条件) であるから,

$$v_{r,z} = 0, \quad (c \neq 0) \quad (4.30)$$

となる.

ゆえに分岐方程式は次のようになる.

増分釣合式:

$$a\left(\frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\right)_{,r}\right)_{,r}\right)_{,r} - 2b\left(\frac{1}{r}(rv_{r,zz})_{,r}\right)_{,r} + cv_{r,zzzz} = 0 \quad (4.20 : \text{再掲})$$

境界条件:

$$(2b - a)\left\{\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\right\}_{,zz} - a\frac{1}{r}\left(r\left(\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\right)_{,r}\right)_{,r} + (a + c)\frac{1}{r}v_{r,zz} = 0 \quad \text{on } r = R \quad (4.27 : \text{再掲})$$

$$\left(\frac{1}{r}(rv_r)_{,r}\right)_{,r} - v_{r,zz} = 0, \quad (a \neq 0) \quad \text{on } r = R \quad (4.29 : \text{再掲})$$

$$v_{r,z} = 0, \quad (c \neq 0) \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.30 : \text{再掲})$$

$$v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (4.12_2 : \text{再掲})$$

上下面の境界条件より速度場は次式のように仮定できる.

$$v_r = V_r(r)\sin(k_m z), \quad v_z = V_z(r)\cos(k_m z), \quad (k_m = \frac{m\pi}{2H}) \quad (4.31)$$

ただし，変形モードを示す整数  $m$  が偶数のとき， $z$ 座標の原点を  $\frac{H}{m}$  だけ移動させる必要がある．また， $V_r(r)$  は次の支配方程式を満足しなければならない．

$$(aL_4 + 2bk_m^2 L_2 + ck_m^4)V_r(r) = 0 \quad (4.32)$$

ここで， $L_2(\cdot) = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r(\cdot)) \right\}$ ， $L_4(\cdot) = L_2(L_2(\cdot))$  である．

また式 (4.19) より， $V_z(r)$  は  $V_r(r)$  を用いて，

$$V_z(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \{ r V_r(r) \} \quad (4.33)$$

と表わせる．

上下端の境界条件は速度場を式 (4.31) のようにおけば自動的に満足されるので，側面の境界条件について考える．式 (4.27) と式 (4.29) はそれぞれ，

$$(2b-a)k_m^2 \{ (rV_r)_{,r} \} + a(r(\frac{1}{r}(rV_r)_{,r})_{,r})_{,r} + (a+c)k_m^2 V_r = 0 \quad \text{on } r = R \quad (4.34)$$

$$(\frac{1}{r}(rV_r)_{,r})_{,r} + k_m^2 V_r = 0, \quad (a \neq 0) \quad \text{on } r = R \quad (4.35)$$

となる．

#### 4. 2. 6 支配方程式の分類

式 (4.32) の支配方程式は次のように変形できる．

$$(L_2 + k_m^2 \rho^2)(L_2 + k_m^2 \bar{\rho}^2)V_r(r) = 0 \quad (4.36)$$

ここで， $\rho^2$ ， $\bar{\rho}^2$  は次式で与えられる．

$$\rho^2, \bar{\rho}^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (4.37)$$

これは，次式のような 4 次方程式の根である．

$$a\rho^4 - 2bk_m^2\rho^2 + ck_m^4 = 0 \quad (4.38)$$

ここで,  $a$ ,  $b$ , および  $c$  は式 (4.21) と同様である. また式 (4.36) より,  $V_r(r)$  の一般解の形は,

$$V_r(r) = c_1 J_1(\rho k_m r) + c_2 J_1(\bar{\rho} k_m r) \quad (4.39)$$

となり,  $c_1$ ,  $c_2$  は未定定数であり,  $J_n$  ( $n=0,1$ ) は第  $n$  次のベッセル関数である.

$a$ ,  $b$ , および  $c$  は, 供試体内の応力の変化にともない変化するので式 (4.38) の実数解の存在個数が異なり, 実数解の存在個数が 0, 2 および 4 個に対応して, 支配方程式はそれぞれ楕円型 (E), 放物型 (P), および双曲型 (H) に分類される. なお, 楕円領域はさらに二つの領域に分類でき, 4 つの複素数解の場合を (EC), 4 つの虚数解の場合を (EI) とする. それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる.

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} < 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{EI 領域}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{EC 領域}$$

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} > 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{H 領域}$$

$$2\mu < |\bar{q}| \quad \text{P 領域}$$

#### 4. 2. 7 分岐条件式

##### 4. 2. 7. 1 EC 領域の分岐条件式

EC 領域では, 式 (4.38) における根は, 共役な複素数であり,  $P \pm iQ$ ,  $-P \pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (4.40)$$

また,  $V_r(r)$  は  $\rho = P + iQ$  として,

$$V_r(r) = \Re[C J_1(\rho k_m r)] \quad (4.41)$$

ここで,  $C$  は複素数の未定定数で,  $\Re[\dots]$  は  $[\dots]$  の実数部分を表す.

式 (4.41) を式 (4.34) および式 (4.35) に代入することにより, 次の分岐条件式が導かれる (Appendix E) .

$$\begin{aligned}
& \frac{(b-a)\Re[J_1(\rho k_m R)] - \sqrt{ac-b^2}\Im[J_1(\rho k_m R)]}{(b-a)\Im[J_1(\rho k_m R)] + \sqrt{ac-b^2}\Re[J_1(\rho k_m R)]} \\
& = \frac{a^- P k_m R \Re[J_0(\rho k_m R)] - a^+ Q k_m R \Im[J_0(\rho k_m R)] - (a+c)\Re[J_1(\rho k_m R)]}{a^- P k_m R \Im[J_0(\rho k_m R)] + a^+ Q k_m R \Re[J_0(\rho k_m R)] - (a+c)\Im[J_1(\rho k_m R)]} \quad (4.42)
\end{aligned}$$

ここで、 $\Im[\dots]$ は $[\dots]$ の虚数部分を表す。また、 $a^+ = a + \sqrt{ac}$ 、 $a^- = a - \sqrt{ac}$ である。

#### 4. 2. 7. 2 EI 領域の分岐条件式

EI 領域では、式 (4.38) における根は虚数であり  $\pm iP$ 、 $\pm iQ$  ( $P > 0$ 、 $Q > 0$ 、 $P < Q$ ) とおくと  $P$ 、 $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a} \quad (4.43)$$

$V_r(r)$  の一般解は次式となる。

$$V_r(r) = c_1 I_1(P k_m r) + c_2 I_1(Q k_m r) \quad (4.44)$$

ここで、 $I_n$  ( $n=0,1$ ) は第  $n$  次の修正ベッセル関数で、 $c_1$ 、 $c_2$  は実数の未定定数である。分岐条件式は次のように得られる。

$$\frac{(1+P^2)I_1(P k_m R)}{(1+Q^2)I_1(Q k_m R)} = \frac{P k_m R \{(1-P^2)a - 2b\} I_0(P k_m R) - (a+c)I_1(P k_m R)}{Q k_m R \{(1-Q^2)a - 2b\} I_0(Q k_m R) - (a+c)I_1(Q k_m R)} \quad (4.45)$$

#### 4. 2. 7. 3 P 領域の分岐条件式

P 領域では、式 (4.38) における根のうち実数解を  $\pm P$ 、虚数解を  $\pm iQ$  ( $P > 0$ 、 $Q > 0$ ) とおくと  $P$ 、 $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (4.46)$$

$V_r(r)$  の一般解は次式となる。

$$V_r(r) = c_1 J_1(P k_m r) + c_2 I_1(Q k_m r) \quad (4.47)$$



ここで,  $c_1, c_2$  は実数の未定定数である.

分岐条件式は次のように得られる.

$$\frac{(1-P^2)J_1(Pk_m R)}{(1+Q^2)I_1(Qk_m R)} = \frac{Pk_m R\{(1+P^2)a-2b\}J_0(Pk_m R)-(a+c)J_1(Pk_m R)}{Qk_m R\{(1-Q^2)a-2b\}I_0(Qk_m R)-(a+c)I_1(Qk_m R)} \quad (4.48)$$

#### 4. 2. 7. 4 H 領域の分岐条件式

H 領域では, 式 (4.38) における根は実数であり  $\pm P, \pm Q$  ( $P>0, Q>0, P>Q$ ) とおくと  $P, Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a} \quad (4.49)$$

$V_r(r)$  の一般解は次式となる.

$$V_r(r) = c_1 J_1(Pk_m r) + c_2 J_1(Qk_m r) \quad (4.50)$$

ここで,  $c_1, c_2$  は実数の未定定数である.

分岐条件式は次のように得られる.

$$\frac{(1-P^2)J_1(Pk_m R)}{(1-Q^2)J_1(Qk_m R)} = \frac{Pk_m R\{(1+P^2)a-2b\}J_0(Pk_m R)-(a+c)J_1(Pk_m R)}{Qk_m R\{(1+Q^2)a-2b\}J_0(Qk_m R)-(a+c)J_1(Qk_m R)} \quad (4.51)$$

#### 4. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比

前節では円柱供試体の側水圧一定条件下での分岐荷重の理論解を与える分岐条件式を導いた。本節では得られた分岐荷重の解析結果を示し、その物理的考察を行う。解析にあたって、用いる土質パラメータは前章同様、関口<sup>5)</sup>の三軸試験の結果より、次の値を用いるものとする。

$$\lambda = 0.231, \quad \kappa = 0.042, \quad \nu = 0.333, \quad M = 1.430, \quad e = 1.5$$

また、非共軸モデルの場合、非共軸パラメータ  $A$  の値については、

$$A = 0.01$$

を用いる。ゆえに、本解析結果は試行的なものであるが、いずれにしても非共軸項のない共軸モデルでは、実際現象を説明できない実例が多々あることが分かってきている。分岐条件式は、分岐荷重  $q/p'$ 、分岐時の供試体寸法比  $R/H$ 、変形モード  $m$ 、非共軸パラメータ  $A$  の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、「分岐荷重」と「供試体寸法比」の関係が得られる。

図-4.2 に圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデルの軸対称型 1,2,4,6 次変形モードにおける「分岐荷重」と「分岐時の供試体寸法比」の関係を示す。

弾性体梁の座屈問題では、普通、高次の分岐荷重が低次の分岐荷重より大きいことが分かる。ここでは低次のモードの分岐荷重が高次のモードのそれより必ずしも小さくないことが分かる。また、各モードの分岐荷重は供試体の  $R/H$  が大きくなるにしたがって、ほぼ一定値  $q/p' \approx 1.397$  となることがわかる。このことから、様々な分岐モードが、ほぼ同一な分岐荷重で生じることや、モードの移り変わり、重ね合わせが生じる可能性を説明できる。また、実際現象において、円柱供試体の圧縮試験では、 $m=2$  である軸対称のバルジのような変形がしばしば見られるが、本解析解においては、共軸モデルでは、いかなる供試体寸法比においても分岐荷重が存在しなかった。このことは、共軸モデルは、主応力方向の急激な変化に変形速度の応答が鈍感である特性を反映しており、共軸モデルの非現実性を示している。金属における弾塑性座屈でも共軸モデルによる座屈荷重が実験値より、はるかに大きく種々の非共軸モデルが提案されている。

また、非共軸モデルにおいても、細長い供試体の分岐荷重は存在しないが、細長い場合は、非軸対称の分岐荷重が最低値になると考えるのが自然である。非軸対称の分岐解析の結果は次章にて説明する。

次に図-4.3 に伸張試験における共軸モデルの軸対称型 1,2 次変形モードと非共軸モデルの軸対称型 1,2,6 次変形モードにおける「分岐荷重」と「分岐時の供試体寸法比」の関係

を示す。

圧縮試験の場合、共軸モデルでは、いかなる供試体寸法比においても分岐荷重が存在しなかったが、伸張試験の場合は  $R/H$  の単調増加関数となる分岐荷重が存在している。しかし、同一モードの分岐荷重は、共軸モデルの場合より、非共軸モデル場合の分岐荷重が低い。このことから非共軸項の存在は分岐の促進をもたらすことがわかる。

また、実際の細長い円柱供試体の伸張試験の場合は、圧縮試験の場合と異なり、非軸対称モードにはならず、ほとんどの場合、初期の非均一変形として、円柱中央部近傍の一部がくびれる「低次の軸対称モード」が観察される。本解析結果によると、伸張（図 4.3）の場合は圧縮（図 4.2）の場合と異なり、細長い場合は低次のモードの分岐荷重が小さいことから、本解析結果は、この現象をうまく説明している。

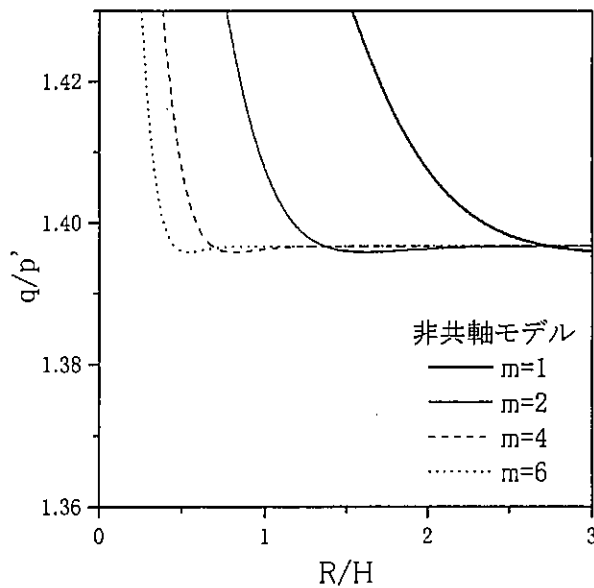


図 4.2 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(圧縮試験)

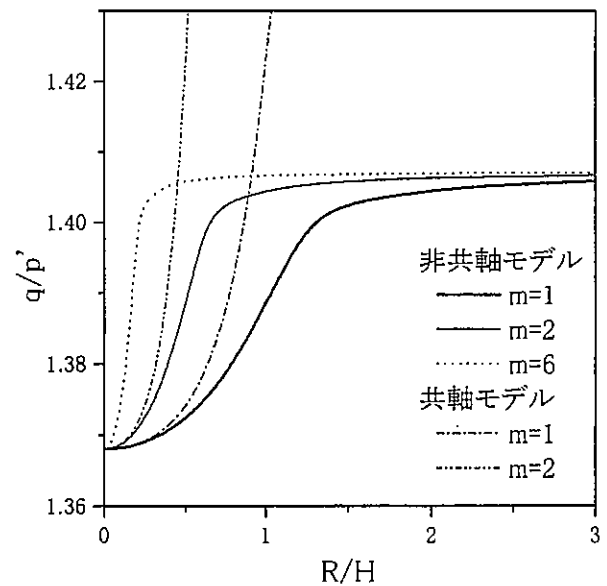


図 4.3 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(伸張試験)

#### 4. 4 最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察

圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデル円柱供試体の軸対称変形場における最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布を式 (4.55) より求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。通常、粘土のすべり面は、破壊力学の用語で言えばモードⅡ型またはモードⅢ型（せん断型）の進行性破壊であるので、ここでも、上記の最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置と仮定して議論する。軸対称変形を考えているので、 $\theta$  が一定で切り取られる面を考えている。図 4.4 から図 4.6 は、横軸に半径方向  $r$  ( $0 \leq r \leq R$ )、縦軸に供試体高さ方向  $z$  ( $-H \leq z \leq H$ ) をとる。また、各々の供試体は  $H=1$  とした。図番号の(a)は分岐解の変形モード概形図であり、(b)は最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布図で、色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく、薄い部分で小さいことを示している。なお変形モード図は分岐解である非均一速度場による変形のみを表しており、実際の変形図は、すべての領域で負荷となる自明な均一速度場の変形を加える必要がある。

図 4.4 は  $m=1$ ,  $R/H=2$  の場合である。変形モード概形は図 4.4(a) に示すような上端が細くなり下端が太くなるような 1 次モードを考える。最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布は図 4.4(b) のようになる。図 4.4(b) より、図 4.4(a) のような上端が細くなり下端が太くなるような 1 次の変形モードの場合、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  は下端の中央において最大となることがわかる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、下端の中央から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図 4.5 は  $m=2$ ,  $R/H=2$  の場合である。変形モード概形は図 4.5(a) に示すような一般にバルジと呼ばれるような中央部が膨らむ 2 次モードを考える。最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布は図 4.5(b) のようになる。図 4.5(b) では、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の最大は側面の上下端近傍となっている。したがって、図 4.5(a) のような供試体寸法比  $R/H=2$  において 2 次の軸対称（バルジ型）変形モードが生じる場合、側面の上下端から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図 4.6 は  $m=2$ ,  $R/H=1$  の場合である。変形モード概形は図 4.6(a) に示すような 2 次モードを考える。最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布は図 4.6(b) のようになる。図 4.6(b) より、図 4.6(a) のような供試体寸法比  $R/H=1$  において 2 次の軸対称（バルジ型）の変形モードが生じる場合、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  は供試体中央において最大となることがわかる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、供試体中央から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

これらの結果より最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  が最大になる位置は、変形モードおよび供試体寸法比等の違いにより異なっていることが分かる。

ただし、実際には、前述したように、すべり面は、何らかの非均一（分岐モード）変形後、「非軸対称」的に進行するのが普通であるが、以上の議論は均一変形している途中で「軸対称・拡散分岐モード（Diffuse bifurcation mode）」の出現した場合に限って、速度

勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使って，初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである．なお，本解析解で高次のモードの分岐荷重が低次のそれと，ほとんど変わらない結果が得られたが，はじめに述べた網目状のすべり面群の発生を説明するには，その変形が軸対称（ $\theta$  方向に一定）ではないから，非軸対称のせん断ひずみ分布が得られる「非軸対称分岐モード」の解析が必要となる．

なお，円中供試体の場合もすべり面発生 の考察として，双曲型または放物型における速度勾配の不連続面で定義される「せん断帯モード (Shear band mode)」発生 の必要条件に基づいた議論も可能である．しかし，前章で述べたようにその条件では，せん断帯モードとしてのすべり面の発生する応力状態やその方向は議論できるが，境界条件に無関係な局所的な理論であるため，本分岐解のように，特定の供試体形状におけるすべり面の発生位置までは議論できない．

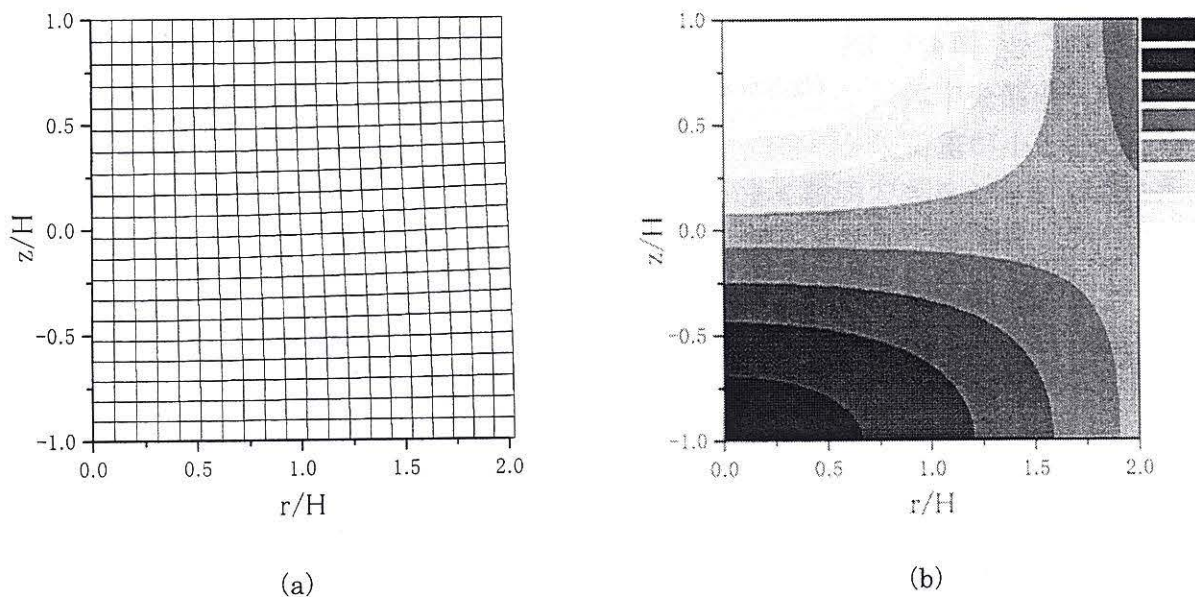
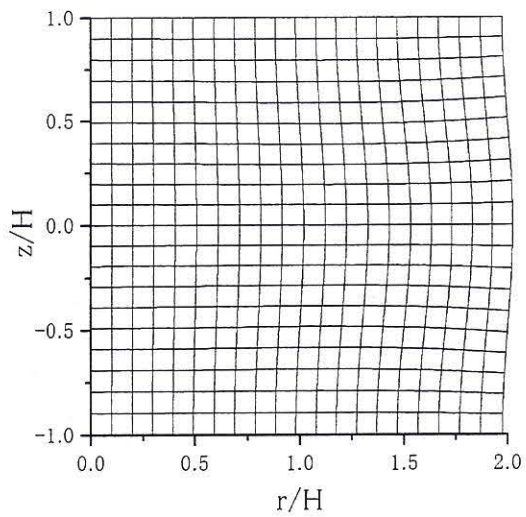
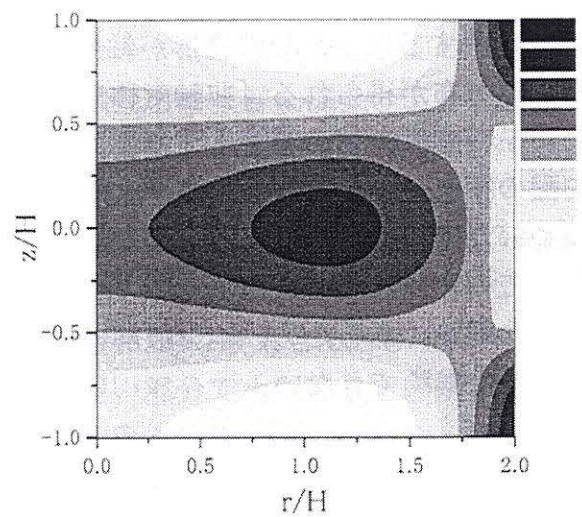


図 4.4 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(軸対称モード,  $m=2$ ,  $R/H=2$ )

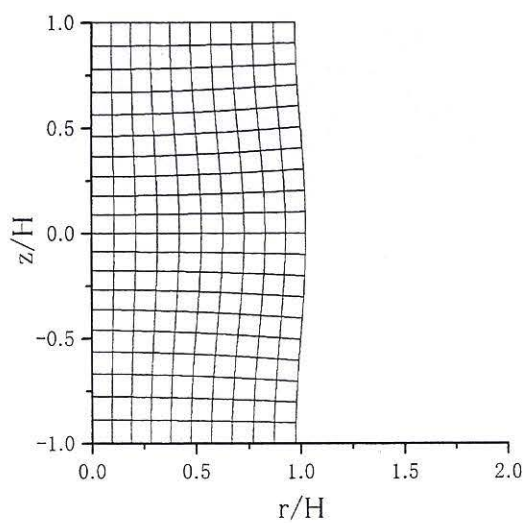


(a)

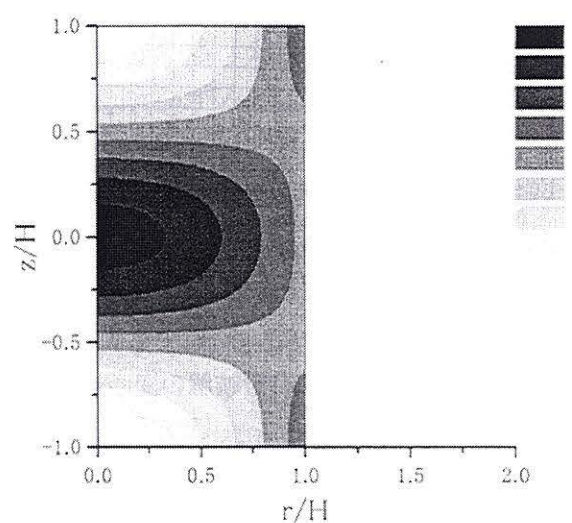


(b)

図 4.5 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(軸対称モード,  $m=1$ ,  $R/H=2$ )



(a)



(b)

図 4.6 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図  
(軸対称モード,  $m=2$ ,  $R/H=1$ )

#### 4. 5 結論

本章では，円柱供試体の変形を軸対称変形に限定し，共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いて分岐解析を行うことにより，まず，分岐条件式の解析解を求め，分岐荷重と変形モードとの関係を議論した．次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより，すべり面の発生位置について考察した．その結果次のような結論を得た．

- (1) 供試体寸法比によっては低次のモードの分岐荷重が高次のモードの分岐荷重より必ずしも小さくないことがわかった．
- (2) 実際現象において，円柱供試体の圧縮試験では， $m=2$ である軸対称のバルジのような変形がしばしば見られるが，（軸対称変形に限定した）本解析解においては，共軸モデルでは，いかなる供試体寸法比においても分岐荷重が存在しなかったが，非共軸モデルではその存在が示された．
- (3) 細長い供試体の伸張試験の分岐解析においては，円柱供試体中央部の一部がくびれる「高次よりくびれの形となる低次の軸対称モード」の分岐荷重が小さいことから，本解析結果は，この伸張試験特有の実現象をうまく説明できることが示された．
- (4) 非共軸項には，分岐の促進効果が含まれていることが示された．
- (5) 最大せん断ひずみの卓越する位置，すなわち，すべり面の生じやすい位置は供試体寸法比および変形モードによって異なることがわかった．

なお，これらの結論は円柱供試体の変形を軸対称に限定した結果によるものである．実際のすべり面の発生形態は非軸対称変形の考察も重要となるので，それについては次章で説明する．

#### 参考文献（第4章）

- 1) 志比利秀, 矢富盟祥: 有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる円柱供試体の軸対称分岐解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.413-421, 1997.
- 2) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I.: General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, Soils and foundations, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 3) Cheng, S. Y., Ariaratnam, S. T., and Dubey, R. N.: Axisymmetric bifurcation in a Elastic-Plastic cylinder under axial load and lateral hydrostatic, Quart. Appl. Math., Vol.29, pp.41-51, 1971.
- 4) Chau, K. T.: Non-normality and bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under tension and compression, Int.J. Soils. Struct., Vol.29, pp. 801-824, 1992.
- 5) Sekiguchi, H.: Rheological characteristics of clays, Proc. 9th ICSFME, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.
- 6) 例えば, 北川 浩: 弾・塑性力学—非線形解析のための基礎理論—, 裳華房, 1987.



## 第5章 円柱供試体の非軸対称分岐解析<sup>1)</sup>

### 5. 1 概説

第3章概説で述べたように、円柱形正規圧密粘土の供試体を軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、最大荷重近傍でバルジ型に変形した後、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。この場合さらに荷重を加えてゆくと、そのすべり面群が突然見えなくなるという現象も観察されている。

そこで本章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデル<sup>2)</sup>を用いた円柱供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮した場合の非軸対称分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。

これまでに行われた円柱供試体の非軸対称分岐解析には、Chau<sup>3) 4)</sup>の2編の報告がある。前者は、対称軸の変形を一方向に限定して分岐解析をしており、後者では高次の分岐解析を行っている。しかしながら、岩石を意図した非関連流動則、横等方性を含む非常に一般的な構成式の場合で、圧縮変形する場合の分岐条件式が、応力速度ポテンシャルを用いて得られている。しかし、構成式における物質係数が、具体的な関数関係が与えられていない一般的なものであるため、分岐荷重と分岐モードの関係を議論する際、分岐荷重として、軸応力を（弾塑性体では応力の関数である）縦せん断係数（45度せん断係数）で無次元化したものを採用し、更に（一般には応力の関数である）縦せん断係数と単純せん断係数の比を定数とみなし、その値を変えた結果に基づいて考察を行なっている。したがって、分岐荷重と分岐モードの関係として、物理的な意味が不明瞭なものになっている。

また、本章においても拡散分岐モードの仮定から得られる速度場より最大せん断ひずみ分布を求め、すべり面の初期発生位置およびその形態を考察する。

## 5. 2 分岐条件式

本章では円柱供試体の均一変形状態から非均一変形状態への非軸対称分岐現象を考える。分岐の生じる瞬間  $t = t$  で図 5.1 に示すような半径  $R$ 、高さ  $2H$  の円柱供試体になったものとする。座標原点を供試体中央にとり、対称軸が  $z$  軸に一致するような円柱座標  $(r, \theta, z)$  を考える。供試体は圧縮および伸張試験に対応して、軸方向にそれぞれ変位制御で圧縮あるいは伸張する（その際、両端面では固定着の条件および摩擦なしを仮定し、両端面の全応力を  $\sigma_a : \sigma_a = \sigma'_a + u$  とする）。側方荷重は水圧一定（その際、側面の全応力を  $\sigma_b : \sigma_b = \sigma'_b + u$  とする）で与えるものとする。その際、円周方向の全応力も  $\sigma_b$  となる。この時、平均有効応力は  $p' (= -\frac{1}{3} \text{tr} T') = \frac{\sigma'_a + 2\sigma'_b}{3}$ 、応力差は  $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|S\| = |\sigma_a - \sigma_b|$  となる。なお、本章でも前章までと同様の理由で、偏差応力の不変量  $q$  と平均有効応力の  $p'$  の比  $\frac{q}{p'} (= \eta)$  をもって「分岐荷重」と呼ぶ。

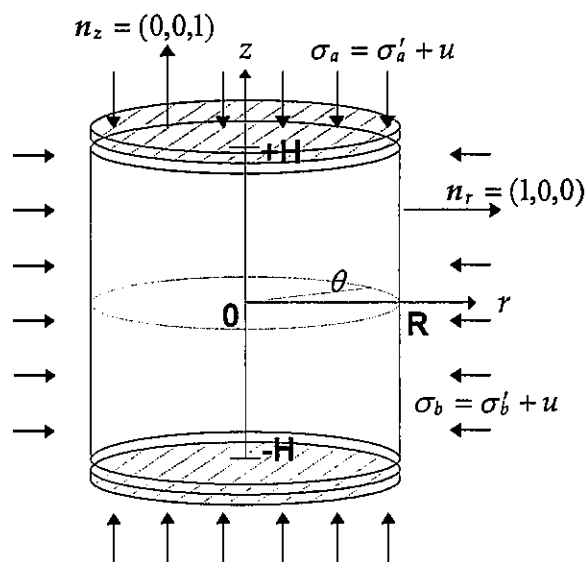


図 5.1 分岐直前の円柱供試体概形図

### 5. 2. 1 増分釣合式

式 (2.121) の増分釣合式は円柱座標  $(r, \theta, z)$  を用いると、

$$\dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} = 0$$

$$\dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_{,\theta}}{r} = 0$$

$$\dot{T}'_{rz,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} = 0 \quad (5.1)$$

となる。

### 5. 2. 2 境界条件

図 5.1 のように，円柱供試体の側面（ $r=R$ ）では一定水圧であたえ（側圧一定条件），上下端部（ $z=\pm H$ ）では摩擦がなく一定速度  $w_0 > 0$  による変位制御圧縮あるいは伸張とすると圧縮試験の場合，式（2.97）の境界条件は成分表示を用いると，

$$(\dot{s}_t)_r = \sigma_b L_{rr}, \quad (\dot{s}_t)_\theta = \sigma_b L_{r\theta}, \quad (\dot{s}_t)_z = \sigma_b L_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (5.2)$$

$$(\dot{s}_t)_r = 0, \quad (\dot{s}_t)_\theta = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (5.3)$$

となる。なお，伸張試験の場合，式（5.3）<sub>3</sub>は次式で与えられる。

$$v_z = \pm w_0 \quad \text{on } z = \pm H$$

まず，側面の境界条件を考える。式（5.2）<sub>1</sub>は，

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} - T_{rr} L_{rr} \\ &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} + \sigma_b L_{rr} (= \sigma_b L_{rr}) \end{aligned}$$

となり，すなわち，

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u} \quad (5.4)$$

となる。また，式（5.2）<sub>2</sub>は，

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_\theta &= \dot{T}'_{\theta r} - T_{\theta\theta} L_{r\theta} \\ &= \dot{T}'_{\theta r} + \sigma_b L_{r\theta} (= \sigma_b L_{r\theta}) \end{aligned}$$

となり，すなわち，

$$\dot{T}'_{\theta r} = 0 \quad (5.5)$$

となる。また，式（5.2）<sub>3</sub>は，

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_z &= \dot{T}'_{zr} - T_{zz}L_{rz} \\
&= \dot{T}'_{zr} + \sigma_a L_{rz} (= \sigma_b L_{rz})
\end{aligned}$$

となり, すなわち,

$$\dot{T}'_{zr} = -(\sigma_a - \sigma_b)L_{rz} = -qL_{rz} \quad (5.6)$$

となる.

次いで, 上下端面の境界条件を考える. 式 (5.3) <sub>1</sub>は,

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rz} - T_{rr}L_{zr} \\
&= \dot{T}'_{rz} + \sigma_b L_{zr} (= 0)
\end{aligned}$$

となる. ここで, 上下端面においては  $v_{z,r} = 0$  (固定着の条件) であることを考慮すると上式は,

$$\dot{T}'_{rz} = 0 \quad (5.7)$$

となる. また, 式 (5.3) <sub>2</sub>は,

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_\theta &= \dot{T}'_{\theta z} - T_{\theta\theta}L_{z\theta} \\
&= \dot{T}'_{\theta z} + \sigma_b L_{z\theta} (= 0)
\end{aligned}$$

となり, 上下端面においては  $v_{z,\theta} = 0$  (固定着の条件) であることを考慮すると上式は,

$$\dot{T}'_{\theta z} = 0 \quad (5.8)$$

となる. ゆえに, 境界条件は,

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (5.9)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (5.10)$$

となる. なお伸張試験の場合, 式 (5.9) <sub>3</sub>は次式で与えられる.

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R$$

### 5. 2. 3 分岐方程式

分岐方程式が速度に関して線型であるので、速度場の重ねあわせが可能である。ゆえに供試体の変形を均一な変形と非均一な変形からなるものと考え、増分境界値問題の解は均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる。

均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = 0 \quad \text{on } r = R \quad (5.11)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (5.12)$$

非均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (5.13)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (5.14)$$

なお、伸張試験では、式 (5.13) <sub>3</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R$$

この時、均一な変形は増分釣り合い式、境界条件を自動的に満足するため、解くべき分岐方程式は次のようになる。

増分釣り合式：

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_r &= 0 \\ \dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} &= 0 \\ \dot{T}'_{zr,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_z &= 0 \end{aligned} \quad (5.1 : \text{再掲})$$

境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R \quad (5.13 : \text{再掲})$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (5.14 : \text{再掲})$$

なお、伸張試験の場合、式 (5.13) <sub>3</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = \pm R$$

#### 5. 2. 4 構成式

水-土骨格連成を考慮すると，間隙水の連続式より，

$$\text{tr } \mathbf{D} = 0 \quad (5.15)$$

の条件が得られる．式 (5.15) を考慮すると式 (2.86) は次式のように変形できる．

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} \\ \dot{T}'_{r\theta} &= 2\mu D_{r\theta} \\ \dot{T}'_{\theta z} &= 2\mu D_{\theta z} \end{aligned} \quad (5.16)$$

ここで， $\mu^*$ ， $\mu$  はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数，単純せん断係数で，次式で与えられる．

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{\tilde{h}_1\tilde{G}}{\tilde{h}_1 + \tilde{G}}. \quad (5.17)$$

式 (5.16) に  $\dot{\mathbf{T}}' = \dot{\mathbf{T}}' - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$  を代入すると，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} - qW_{rz} \\ \dot{T}'_{r\theta} &= 2\mu D_{r\theta} \\ \dot{T}'_{\theta z} &= 2\mu D_{\theta z} - qW_{\theta z} \end{aligned} \quad (5.18)$$

となり，速度  $v$  を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{v_{z,z} - \frac{1}{2}(v_{r,r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}v_{\theta,\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(v_{r,r} - \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r}v_{\theta,\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\
\dot{T}'_{r\theta} &= \mu\left(\frac{1}{r}v_{r,\theta} - \frac{1}{r}v_{\theta} + v_{\theta,r}\right) \\
\dot{T}'_{\theta z} &= \mu\left(v_{\theta,z} + \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) - \frac{1}{2}q\left(v_{\theta,z} - \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

となる.

### 5. 2. 5 速度場の導入

上下端面の境界条件を考える. 速度  $v$  を用いると, 式 (5.14) <sub>1</sub> は,

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}q\right)v_{r,z} + \left(\mu + \frac{1}{2}q\right)v_{z,r} (= 0)
\end{aligned}$$

と表され,  $v_{z,r} = 0$  (固定着の条件) を考慮すると, 式 (5.14) <sub>1</sub> の上下端面の境界条件は,

$$v_{r,z} = 0, \quad (2\mu - q \neq 0) \tag{5.20}$$

となる. 式 (5.14) <sub>2</sub> は,

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{\theta z} &= \mu\left(v_{\theta,z} + \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) - \frac{1}{2}q\left(v_{\theta,z} - \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}q\right)v_{\theta,z} + \left(\mu + \frac{1}{2}q\right)\frac{1}{r}v_{z,\theta} (\neq 0)
\end{aligned}$$

と表され,  $v_{z,\theta} = 0$  (固定着の条件) を考慮すると, 式 (5.14) <sub>2</sub> の上下端面の境界条件は,

$$v_{\theta,z} = 0, \quad (2\mu - q \neq 0) \tag{5.21}$$

となる. 式 (5.14) <sub>3</sub>, 式 (5.20), および式 (5.21) の上下端面の境界条件および  $\theta$  方向の連続条件を考えて速度場を以下のように仮定する.

$$\begin{aligned}
v_r &= V_r(r) \cos(n\theta) \sin(k_m z) \\
v_\theta &= V_\theta(r) \sin(n\theta) \sin(k_m z) \\
v_z &= V_z(r) \cos(n\theta) \cos(k_m z)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ここで,  $k_m = \frac{m\pi}{2H}$  ( $m=1,2,\dots$ ) である. 以下, 式の簡略化のため  $V_r(r)$ ,  $V_\theta(r)$ , および  $V_z(r)$  をそれぞれ,  $V_r$ ,  $V_\theta$ , および  $V_z$  と表わすことにする.  
式 (5.15) より,  $V_z$  は次式で表わせる.

$$V_z = \frac{1}{k} \left( V_r' + \frac{1}{r} V_r + \frac{n}{r} V_\theta \right) \quad (5.23)$$

### 5. 2. 6 支配方程式の分類

最終的に増分釣合式から次の支配方程式を満足しなければならない (Appendix F) .

$$L_1(L_2(V_\theta)) - L_3\psi = 0 \quad (5.24)$$

$$L_4\psi = 0 \quad (5.25)$$

ここで,  $L_i$  ( $i=1\sim 4$ ) は次のような微分演算子である.

$$L_1(\ ) = \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_1^2 k_m^2 r^2) \right\} (\ )$$

$$L_2(\ ) = \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 3r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_2^2 k_m^2 r^2) \right\} (\ )$$

$$L_3(\ ) = \left\{ \left( \frac{2b+2\mu}{a} - \rho_3^2 \right) k_m^2 r^3 \frac{d}{dr} + \left( \frac{2b-2\mu}{a} - 3\rho_3^2 \right) k_m^2 r^2 \right\} (\ )$$

$$L_4(\ ) = \left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_3^2 k_m^2 r^2) \right\} (\ )$$

また,

$$\psi = \frac{d}{dr} (r V_\theta) + n V_r \quad (5.26)$$

であり,  $\rho_i$  ( $i=1,2,3$ ) は次式で与えられる.

$$\rho_1^2, \rho_2^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \rho_3^2 = -\frac{c}{2\mu} \quad (5.27)$$

ここで,  $a$ ,  $b$ , および  $c$  は次式で与えられる.

$$a = 2\mu + q, \quad b = -(3\mu^* - \mu), \quad c = 2\mu - q \quad (5.28)$$



$\rho_1$ ,  $\rho_2$ , および  $\rho_3$  は次式を満足することに他ならない.

$$a\rho_i^4 - 2b\rho_i^2 + c = 0, \quad (i=1,2) \quad (5.29)$$

$$2\mu\rho_3^2 + c = 0 \quad (5.30)$$

式 (5.25) より,  $\psi$  の一般解は次式となる.

$$\psi = c_3 r J_n(\rho_3 k_m r) \quad (5.31)$$

ここで,  $J_n$  ( $n=0,1,\dots$ ) は第  $n$  次のベッセル関数であり,  $c_3$  は未定定数である.

式 (5.24) は,  $V_\theta$  の支配方程式とみなせ,  $V_\theta$  の斉次解は次式となる.

$$V_\theta = \frac{c_1}{r} J_n(\rho_1 k_m r) + \frac{c_2}{r} J_n(\rho_2 k_m r) \quad (5.32)$$

ここで,  $c_1$ ,  $c_2$  は未定定数である.

また,  $V_\theta$  の特解は,

$$V_\theta = \frac{c_3}{\rho_3^2 k_m^2} \frac{d}{dr} J_n(\rho_3 k_m r) \quad (5.33)$$

となる (Appendix G) . 式 (5.26) と式 (5.23) より,  $V_r$ ,  $V_\theta$ , および  $V_z$  は次式のように置くことができる (Appendix F) .

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 J_n(\rho_2 k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} J_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 J_n(\rho_2 k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} J_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 \rho_1^2 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 \rho_2^2 J_n(\rho_2 k_m r)\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

ここで,  $\frac{c_3}{\rho_3^2 k_m^2}$  を新たに  $c_3$  と置き換えた.

$a$ ,  $b$ , および  $c$  は, 供試体内の応力の変化にともない変化するので式 (5.29) の実数解の存在個数が異なり, 実数解の存在個数が 0, 2, および 4 個に対応して支配方程式はそれぞれ楕円型 (E), 放物型 (P), および双曲型 (H) に分類される. なお, 楕円領域はさらに二つの領域に分類でき 4 つの複素数解の場合を (EC), 4 つの虚数解の場合を (EI) と

する．それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる．

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} < 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{EI 領域}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{EC 領域}$$

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} > 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{H 領域}$$

$$2\mu < |\bar{q}| \quad \text{P 領域}$$

## 5. 2. 7 分岐条件式

### 5. 2. 7. 1 EC 領域の分岐条件式

EC 領域では，式 (5.29) における根は，共役な複素数であり， $P \pm iQ$ ， $-P \pm iQ$  ( $P > 0$ ， $Q > 0$ ) とおくと  $P$ ， $Q$  の間には次の関係式が成り立つ．

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (5.35)$$

また，速度場の一般解は  $\rho_1, \bar{\rho}_1 = P \pm iQ$  として，

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 \rho_1^2 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 \bar{\rho}_1^2 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

ここで， $c_1$ ， $\bar{c}_1$  が共役な複素数の未定定数で， $c_3$  は実数の未定定数である．また， $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた． $\Im[\dots]$  は  $[\dots]$  の虚数部分である．

式 (5.36) を側面の境界条件，式 (5.13) に代入すると，次式が得られる (Appendix H) ．

$$\begin{aligned} \xi_1^j(\rho_1, R)c_1 + \xi_1^j(\bar{\rho}_1, R)\bar{c}_1 + \xi_4^j(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\ \xi_2^j(\rho_1, R)c_1 + \xi_2^j(\bar{\rho}_1, R)\bar{c}_1 + \xi_5^j(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\ \xi_3^j(\rho_1, R)c_1 + \xi_3^j(\bar{\rho}_1, R)\bar{c}_1 + \xi_6^j(\rho_3, R)c_3 &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

ここで， $\xi_i^j$  ( $i=1,2,3$ )， $\xi_j^i$  ( $j=4,5,6$ ) は次式で与えられる関数である．

$$\begin{aligned}
\xi_1^j(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) - \{a(1 + \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] J_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_2^j(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1) J_n(\rho k_m r) - \rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_3^j(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 - \rho^2) \{n J_n(\rho k_m r) - \rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_4^j(\rho, r) &= \frac{4k_m n}{r^2} \mu \{\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + (n-1) I_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_5^j(\rho, r) &= \frac{1}{r^2} [-2\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + \{2(n^2 - n) + \rho^2 k_m^2 r^2\} I_n(\rho k_m r)] \\
\xi_6^j(\rho, r) &= \frac{k_m n}{r} I_n(\rho k_m r)
\end{aligned}$$

分岐条件式は、式 (5.37) において  $c_1$ ,  $\bar{c}_1$ , および  $c_3$  の非自明な解が存在する条件として次式のように得られる。

$$\xi_6^j(\rho_3) \Im[\xi_1^j(\rho_1) \xi_2^j(\bar{\rho}_1)] - \xi_5^j(\rho_3) \Im[\xi_3^j(\rho_1) \xi_1^j(\bar{\rho}_1)] + \xi_4^j(\rho_3) \Im[\xi_2^j(\rho_1) \xi_3^j(\bar{\rho}_1)] = 0 \quad (5.38)$$

#### 5. 2. 7. 2 EI 領域の分岐条件式

EI 領域では、式 (5.29) における根は、虚数であり、 $\pm iP$ ,  $\pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $P < Q$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a} \quad (5.39)$$

また、速度場の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned}
V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 I_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\
V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 I_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\
V_z &= -k_m \{c_1 P^2 I_n(Pk_m r) + c_2 Q^2 I_n(Qk_m r)\}
\end{aligned} \quad (5.40)$$

ここで、 $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) は実数の未定定数であり、 $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた。  
式 (5.40) を側面の境界条件、式 (5.13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\xi_1^j(P, R)c_1 + \xi_1^j(Q, R)c_2 + \xi_4^j(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\
\xi_2^j(P, R)c_1 + \xi_2^j(Q, R)c_2 + \xi_5^j(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\
\xi_3^j(P, R)c_1 + \xi_3^j(Q, R)c_2 + \xi_6^j(\rho_3, R)c_3 &= 0
\end{aligned} \quad (5.41)$$

ここで、 $\xi_i^1$  ( $i=1,2,3$ ) は次式で与えられる関数である。

$$\begin{aligned}\xi_1^1(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) + \{a(1 - \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] I_n(\rho k_m r)\} \\ \xi_2^1(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1)I_n(\rho k_m r) - \rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r)\} \\ \xi_3^1(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 + \rho^2) \{n I_n(\rho k_m r) - \rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r)\}\end{aligned}$$

分岐条件式は式 (5.41) において  $c_1$ ,  $c_2$ , および  $c_3$  の非自明な解が存在する条件として次式のように得られる。

$$\begin{aligned}\xi_6^1(\rho_3, R) \{ \xi_1^1(P, R) \xi_2^1(Q, R) - \xi_1^1(Q, R) \xi_2^1(P, R) \} - \xi_3^1(\rho_3, R) \{ \xi_3^1(P, R) \xi_1^1(Q, R) - \xi_3^1(Q, R) \xi_1^1(P, R) \} \\ + \xi_4^1(\rho_3, R) \{ \xi_2^1(P, R) \xi_3^1(Q, R) - \xi_2^1(Q, R) \xi_3^1(P, R) \} = 0\end{aligned}\quad (5.42)$$

### 5. 2. 7. 3 P 領域の分岐条件式

P 領域では、式 (5.29) における根のうち実数解を  $\pm P$ , 虚数解を  $\pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (5.43)$$

また、速度場の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned}V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 P^2 J_n(Pk_m r) - c_2 Q^2 I_n(Qk_m r)\}\end{aligned}\quad (5.44)$$

ここで、 $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) は実数の未定定数であり、 $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた。

式 (5.44) を側面の境界条件、式 (5.13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}\xi_1^1(P, R)c_1 + \xi_1^1(Q, R)c_2 + \xi_4^1(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\ \xi_2^1(P, R)c_1 + \xi_2^1(Q, R)c_2 + \xi_5^1(\rho_3, R)c_3 &= 0 \\ \xi_3^1(P, R)c_1 + \xi_3^1(Q, R)c_2 + \xi_6^1(\rho_3, R)c_3 &= 0\end{aligned}\quad (5.45)$$

分岐条件式は式 (5.45) において  $c_1$ ,  $c_2$ , および  $c_3$  の非自明な解が存在する条件として次式のように得られる.

$$\begin{aligned} & \xi_6^1(\rho_3, R) \{ \xi_1^1(P, R) \xi_2^1(Q, R) - \xi_1^1(Q, R) \xi_2^1(P, R) \} - \xi_5^1(\rho_3, R) \{ \xi_3^1(P, R) \xi_1^1(Q, R) - \xi_3^1(Q, R) \xi_1^1(P, R) \} \\ & + \xi_4^1(\rho_3, R) \{ \xi_2^1(P, R) \xi_3^1(Q, R) - \xi_2^1(Q, R) \xi_3^1(P, R) \} = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

#### 5. 2. 7. 4 H 領域の分岐条件式

H 領域では, 式 (5.29) における根は実数であり  $\pm P$ ,  $\pm Q$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $P > Q$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a} \quad (5.47)$$

また, 速度場の一般解は次式となる.

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{ c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 J_n(Qk_m r) \} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{ c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 J_n(Qk_m r) \} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{ c_1 P^2 J_n(Pk_m r) + c_2 Q^2 J_n(Qk_m r) \} \end{aligned} \quad (5.48)$$

ここで,  $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) は実数の未定定数であり,  $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた.

式 (5.48) を側面の境界条件, 式 (5.13) に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} & \xi_1^1(P, R) c_1 + \xi_1^1(Q, R) c_2 + \xi_4^1(\rho_3, R) c_3 = 0 \\ & \xi_2^1(P, R) c_1 + \xi_2^1(Q, R) c_2 + \xi_5^1(\rho_3, R) c_3 = 0 \\ & \xi_3^1(P, R) c_1 + \xi_3^1(Q, R) c_2 + \xi_6^1(\rho_3, R) c_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

分岐条件式は式 (5.49) において,  $c_1$ ,  $c_2$ , および  $c_3$  の非自明な解が存在する条件として次式のように得られる.

$$\begin{aligned} & \xi_6^1(\rho_3, R) \{ \xi_1^1(P, R) \xi_2^1(Q, R) - \xi_1^1(Q, R) \xi_2^1(P, R) \} - \xi_5^1(\rho_3, R) \{ \xi_3^1(P, R) \xi_1^1(Q, R) - \xi_3^1(Q, R) \xi_1^1(P, R) \} \\ & + \xi_4^1(\rho_3, R) \{ \xi_2^1(P, R) \xi_3^1(Q, R) - \xi_2^1(Q, R) \xi_3^1(P, R) \} = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

### 5. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比

前節では円柱供試体の側水圧一定条件下での非軸対称分岐荷重の理論解を与える分岐条件式を導いた。本節では得られた分岐荷重の解析結果を示し、その物理的考察を行う。

解析にあたって、用いる土質パラメータは前章同様、関口<sup>5)</sup>の三軸試験の結果より、次の値を用いるものとする。

$$\lambda = 0.231, \quad \kappa = 0.042, \quad \nu = 0.333, \quad M = 1.430, \quad e = 1.5$$

また、非共軸モデルの場合、非共軸パラメータ  $A$  の値については、

$$A = 0.01$$

を用いる。

分岐条件式は、分岐荷重  $q/p'$ 、分岐時の供試体寸法比  $R/H$ 、変形モード  $m$ 、 $n$ 、非共軸パラメータ  $A$  の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、「分岐荷重」と「供試体寸法比」の関係が得られる。

図 5.2 に共軸および非共軸モデルの分岐荷重と供試体寸法比および変形モードとの関係を示す。共軸モデルでは、限られた供試体寸法比で非軸対称座屈モード( $n=1$ )の分岐荷重が存在するだけであった。このことは共軸モデルを用いた場合、実際の三軸圧縮試験で観察される軸対称のバルジモード変形モードや、寸胴の供試体においては分岐が生じないことを意味し、非現実的である。しかし、非共軸モデルを用いた場合、軸対称のバルジモードの説明が可能であり、高次のモードの分岐荷重も存在し、実際現象をよりうまく説明できる。また、供試体寸法比が小さい場合、すなわち供試体が細長い場合は非軸対称座屈モードの分岐荷重が極めて低いことが分かる。また、非共軸モデルの場合、非軸対称座屈モード以外については  $m$  が大きいほど、あるいは  $n$  が小さいほど分岐荷重が小さいことが分かる。また同一の寸法比の供試体であっても、ほぼ同一の分岐荷重で様々な分岐モードが生じる事が分かる。

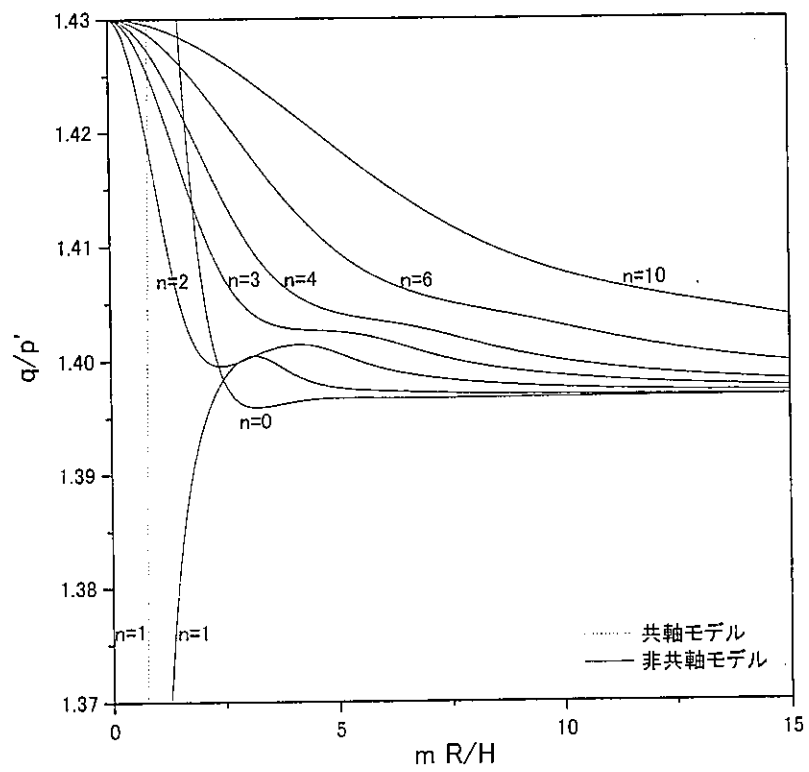


図 5.2 「分岐荷重～寸法比および変形モード」の関係

#### 5. 4 最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察

圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデル円柱供試体の非軸対称変形場における最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布を求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。本章でも前に述べた理由により、上記の最大せん断ひずみが最大となる点がすべり面が最も発生しやすい位置と仮定して議論する。図 5.3 と図 5.4 に最大せん断ひずみの分布および予想されるすべり面の形状を示す。

図番号の(a)では横軸に半径方向  $r$  ( $0 \leq r \leq R_0$ )、縦軸に供試体高さ方向  $z$  ( $-H \leq z \leq H$ ) を、(b)では横軸に円周方向  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ )、縦軸に供試体高さ方向  $z$  ( $-H \leq z \leq H$ ) をとった場合の最大せん断ひずみの分布を示している。また、各々の供試体は  $R/H=1$  とした。最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布図で、色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく、薄い部分で小さいことを示している。また、(c)は(a)、(b)の最大せん断ひずみの分布状態から推察される将来生じるであろうすべり面の形状を示している。

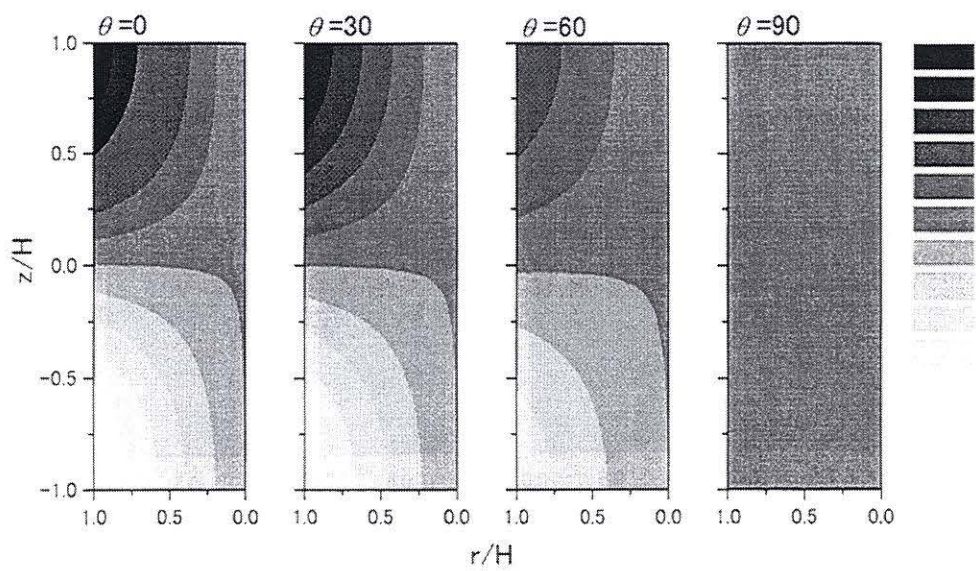
図 5.3 は、非軸対称の座屈型 ( $m=1, n=1$ ) の分岐が生じた場合のせん断ひずみの分布および予想されるすべり面の形状である。

図 5.3(a)、(b)より分かるように、最大せん断ひずみの卓越する位置は供試体の左側上部と右側下部であり、この結果から予想されるすべり面の形状は図 5.3(c)のようになる。このような変形モードは実際の粘土供試体の三軸圧縮試験や一軸圧縮試験で良く観察され、その破壊形状はやはり図 5.3(c)のようになっており最大せん断ひずみの分布からすべり面の予測は定性的に正しいと思われる。

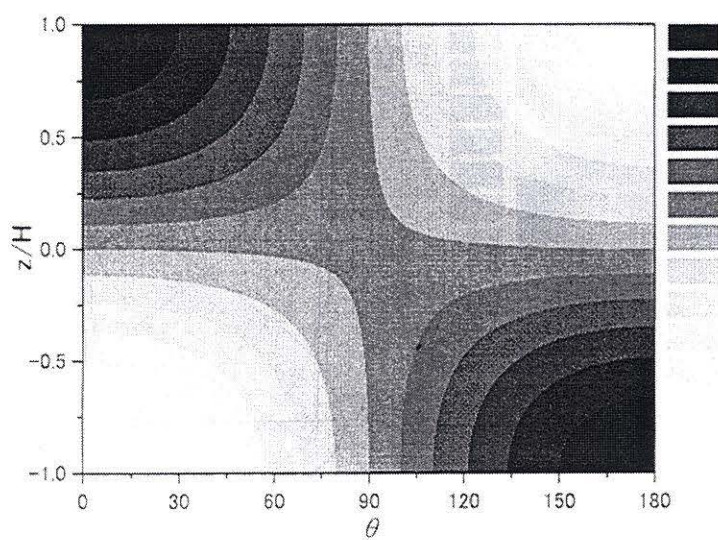
図 5.4 は高次モード ( $m=6, n=6$ ) の分岐が生じた場合のせん断ひずみの分布および予想されるすべり面の形状である。

図 5.4(a)から分かるように、最大せん断ひずみの卓越する位置は供試体側面に周期的に現れている。この結果から、図 5.4(c)に示すようなすべり面群の生成が予想される。このような網目状のすべり面群が観察されるという報告がいくつかある<sup>6) 7)</sup>。また、図 5.4(b)から分かるように最大せん断ひずみの卓越する位置は供試体表面に限られており、すべり面は供試体表面から入ることが予想される。実際すべり面が表面付近にのみ観察されるとの報告がある<sup>6)</sup>。また、この場合、高次の分岐荷重も低次の分岐荷重もほとんど変わらないことから、このすべり面が発生してから、他の低次モードへ飛び移り現象が生じたとすれば、実験で観察されるすべり面が突然観察されなくなるという現象をも説明できる。

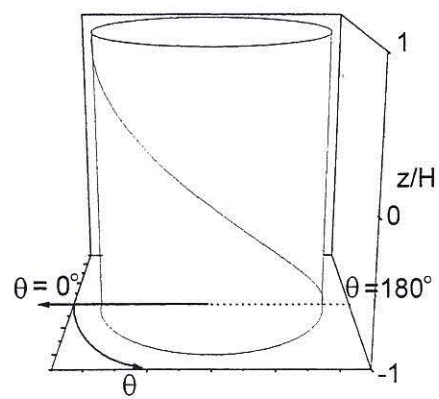




(a)

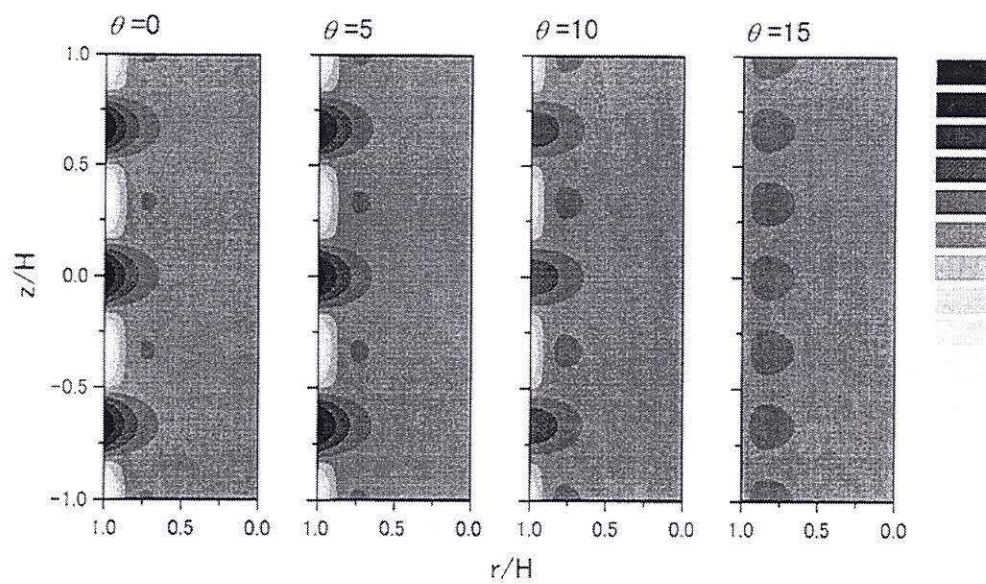


(b)

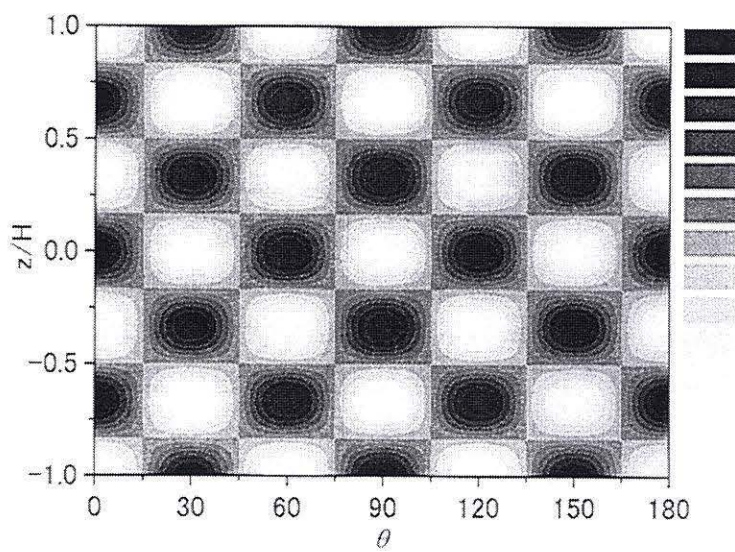


(c)

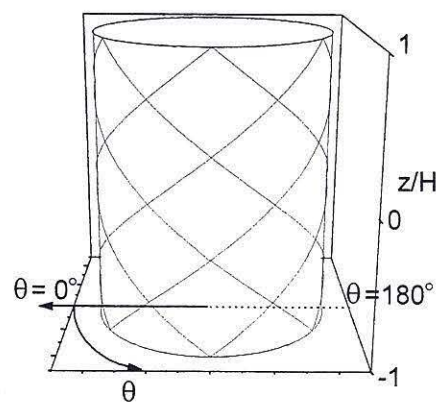
図 5.3 最大せん断ひずみの分布と予想されるすべり面の形状 ( $m=1$ ,  $n=1$ ,  $R/H=1$ )



(a)



(b)



(c)

図 5.4 最大せん断ひずみの分布と予想されるすべり面の形状 ( $m=6$ ,  $n=6$ ,  $R/H=1$ )

## 5. 5 結論

本章では、共軸および非共軸 Cam-clay モデルを用いた円柱供試体の非軸対称分岐解析を行うことにより、まず、分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードとの関係を議論した。次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置とその形状について考察した。その結果次のような結論を得た。

- (1) 共軸モデルでは、非軸対称座屈モード( $n=1$ )の分岐荷重が限られた供試体寸法比でのみ、存在することがわかった。このことは共軸モデルを用いた場合、実際の三軸圧縮試験で観察される軸対称のバルジモード変形モードの説明ができないことや、寸胴の供試体においては分岐が生じないことを意味し、非現実的なモデルであると言える。
- (2) 非共軸モデルの場合、非軸対称座屈モード以外については  $m$  が大きいほど、あるいは  $n$  が小さいほど分岐荷重が小さいことが判明し、同一の寸法比の供試体であっても、ほぼ同一の分岐荷重で様々な分岐モードが生じる事が説明できた。
- (3) 最大せん断ひずみの分布から予測されるすべり面の形状は、実際に三軸圧縮試験などで観察されるものと同じ傾向にあった。
- (4) すべり面群の生成は、分岐の観点から「非共軸モデルによる高次の変形モードが大きく関わっている現象」であるという可能性が検証された。

参考文献（第5章）

- 1) Yatomi, C. and Shibi, T. : Antisymmetric Bifurcation Analysis in a Circular Cylinder of a Non-coaxial Cam-Clay Model, *Proc. Int. Symp. Deformation and Progressive Failure in Geomechanics*, Nagoya, pp.9-14, 1997.
- 2) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 3) Chau, K. T.: Antisymmetric bifurcations in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression. *ASME Journal of Applied Mechanics* Vol.60, pp.282-289, 1993.
- 4) Chau, K. T.: Buckling, Barrelling, and Surface Instabilities of a Finite, Transversely Isotropic Circular Cylinder, *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol.53, pp.225-244, 1995.
- 5) Sekiguchi, H. : Rheological characteristics of clays, *Proc. 9th ICSFME*, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.
- 6) 飯塚敦, 太田秀樹, 坪内正記, 北倫彦 : 中実および中空円筒供試体に発生するすべり線について, 第27回土質工学研究発表会講演概要集, pp. 673-676, 1992.
- 7) Gramberg, J. : *A non-conventional view on rock mechanics and fracture mechanics*. A. A. Balkema, Brookfield, USA, 1989.

## 第6章 中空円柱供試体の非軸対称分岐解析<sup>1)</sup>

### 6. 1 概説

正規圧密粘土の中空円柱供試体においても軸方向に低速度で圧縮すると、軸応力の小さいうちは一様に変形するが、最大応力に近づくにつれ、供試体の寸法比により上下対称バルジ型、上下非対称バルジ型、非対称座屈型、またはそれらの合成モードの変形などが現れる。最大応力近傍に達するとせん断ひずみの局所化が観測され、ついには一つのすべり面に発達すると、耐荷力を失い破壊にいたる。また、丁寧に一様な供試体を作成し、偏心がかからぬように注意深く圧縮すると、表面に網目状すべり面群が観察される場合もある。

そこで本章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデル<sup>2)</sup>を用いた中空円柱供試体に側方水圧一定条件の下で圧縮した場合の分岐解析を行い、分岐荷重の理論解を誘導する。

近年、非共軸性が存在しなければ、つまり共軸モデルでは説明のできないような現象が、数多く報告されている。しかし、現在まで非共軸性を詳細かつ正確に検討した定量的実験は、ほとんど見られない。この実験を行うためには、主応力方向の回転が可能な実験が必要になる。現在まで、それが可能な信頼できる実験を行えるのは、中空円柱供試体である。そこで、この中空円柱供試体における試験結果を有効に検証する為にも、その分岐解析は非常に有効である考える。

本章でも最後に、拡散分岐モードの仮定から得られる速度場より最大せん断ひずみ分布を求め、すべり面の初期発生位置およびその形態を考察する。

なお、著者の知る限り中空円柱供試体の非軸対称の分岐解析に他の報告はない。

## 6. 2 分岐条件式

本章では中空円柱供試体の均一変形状態から非均一変形状態への非軸対称分岐現象を考える．分岐の生じる瞬間 $t=t$ で図 6.1 に示すような外半径 $R_0$ ，内半径 $R_i$ ，高さ $2H$ の中空円柱供試体になったものとする．座標原点を供試体中央にとり，対称軸が $z$ 軸に一致するような円柱座標 $(r, \theta, z)$ を考える．供試体は圧縮および伸張試験に対応して，軸方向にそれぞれ変位制御で圧縮あるいは伸張する（その際，両端面では固定着の条件および摩擦なしを仮定し，両端面の全応力を $\sigma_a$ ： $\sigma_a = \sigma'_a + u$ とする）．外，内の側方荷重は水圧一定（その際，外周面，内周面の全応力を $\sigma_b$ ： $\sigma_b = \sigma'_b + u$ とする）で与えるものとする．その際，円周方向の全応力も $\sigma_b$ となる．その際，円周方向の全応力も $\sigma_b$ となる．この時，平均有効応力 $p' (= -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T}') = \frac{\sigma'_a + 2\sigma'_b}{3}$ ，応力差 $q = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{S}\| = |\sigma_a - \sigma_b|$ となる．なお，本章でも前章までと同様の理由で，偏差応力の不変量 $q$ と平均有効応力の $p'$ の比 $\frac{q}{p'} (= \eta)$ をもって「分岐荷重」と呼ぶ．

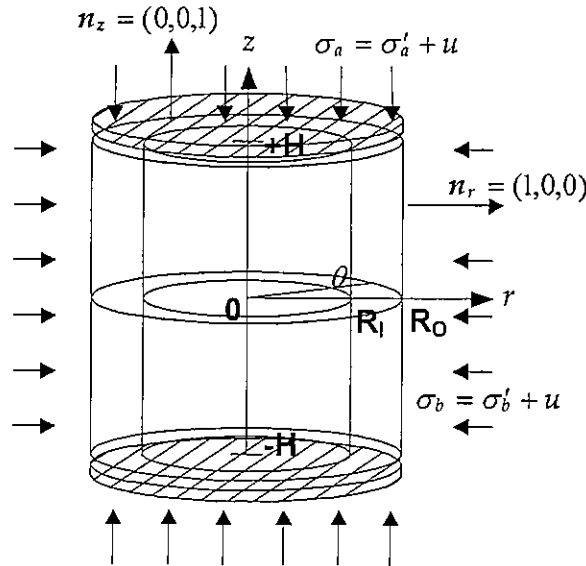


図 6.1 分岐直前の中空円柱供試体概形図

### 6. 2. 1 増分釣合式

式 (2.121) の増分釣合式は円柱座標 $(r, \theta, z)$ を用いると，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_r &= 0 \\ \dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_\theta}{r} &= 0 \end{aligned}$$



$$\dot{T}'_{zr,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} = 0 \quad (6.1)$$

となる.

## 6. 2. 2 境界条件

図 6.1 のように, 円柱供試体の側面 ( $r = R_o, R_i$ ) では一定水圧であたえ (側圧一定条件), 上下端部 ( $z = \pm H$ ) では摩擦がなく一定速度  $w_0 > 0$  による変位制御圧縮あるいは伸張とすると圧縮試験の場合, 式 (2.97) の境界条件は成分表示を用いると,

$$(\dot{s}_t)_r = \sigma_b L_{rr}, \quad (\dot{s}_t)_\theta = \sigma_b L_{r\theta}, \quad (\dot{s}_t)_z = \sigma_b L_{rz} \quad \text{on } r = R_o, R_i \quad (6.2)$$

$$(\dot{s}_t)_r = 0, \quad (\dot{s}_t)_\theta = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (6.3)$$

となる. なお, 伸張試験の場合, 式 (6.3) <sub>3</sub> は次式で与えられる.

$$v_z = \pm w_0 \quad \text{on } z = \pm H$$

まず, 側面の境界条件を考える. 式 (6.2) <sub>1</sub> は,

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} - T_{rr} L_{rr} \\ &= \dot{T}'_{rr} - \dot{u} + \sigma_b L_{rr} (= \sigma_b L_{rr}) \end{aligned}$$

となり, すなわち,

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u} \quad (6.4)$$

となる. また, 式 (6.2) <sub>2</sub> は,

$$\begin{aligned} (\dot{s}_t)_\theta &= \dot{T}'_{\theta r} - T_{\theta\theta} L_{r\theta} \\ &= \dot{T}'_{\theta r} + \sigma_b L_{r\theta} (= \sigma_b L_{r\theta}) \end{aligned}$$

となり, すなわち,

$$\dot{T}'_{\theta r} = 0 \quad (6.5)$$

となる. また, 式 (6.2) <sub>3</sub> は,

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_z &= \dot{T}'_{zr} - T_{zz}L_{rz} \\
&= \dot{T}'_{zr} + \sigma_a L_{rz} (= \sigma_b L_{rz})
\end{aligned}$$

となり，すなわち，

$$\dot{T}'_{zr} = -(\sigma_a - \sigma_b)L_{rz} = -qL_{rz} \quad (6.6)$$

となる．

次いで，上下端面の境界条件を考える．式 (6.3) <sub>1</sub> は，

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_r &= \dot{T}'_{rz} - T_{rr}L_{zr} \\
&= \dot{T}'_{rz} + \sigma_b L_{zr} (= 0)
\end{aligned}$$

となる．ここで，上下端面においては  $v_{z,r} = 0$ （固定着の条件）であることを考慮すると上式は，

$$\dot{T}'_{rz} = 0 \quad (6.7)$$

となる．また，式 (6.3) <sub>2</sub> は，

$$\begin{aligned}
(\dot{s}_t)_\theta &= \dot{T}'_{\theta z} - T_{\theta\theta}L_{z\theta} \\
&= \dot{T}'_{\theta z} + \sigma_b L_{z\theta} (= 0)
\end{aligned}$$

となり，上下端面においては  $v_{z,\theta} = 0$ （固定着の条件）であることを考慮すると上式は，

$$\dot{T}'_{\theta z} = 0 \quad (6.8)$$

となる．ゆえに，境界条件は，

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R_o, R_l \quad (6.9)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (6.10)$$

となる．なお伸張試験の場合，式 (6.9) <sub>3</sub> は次式で与えられる．

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R_o, R_l$$



### 6. 2. 3 分岐方程式

分岐方程式が速度に関して線型であるので、速度場の重ね合わせが可能である。ゆえに供試体の変形を均一な変形と非均一な変形からなるものと考えると、増分境界値問題の解は、次に示すの均一境界条件と非均一境界条件の解の和となる。

均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = 0 \quad \text{on } r = R_O, R_I \quad (6.11)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = \mp w_0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (6.12)$$

非均一境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R_O, R_I \quad (6.13)$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (6.14)$$

なお、伸張試験では、式 (6.13)<sub>3</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R_O, R_I$$

この時、均一な変形は増分釣り合い式、境界条件を自動的に満足するため、解くべき分岐方程式は次のようになる。

増分釣り合式：

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{rr,r} + \frac{\dot{T}'_{r\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{rz,z} + \frac{\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}}{r} - \dot{u}_{,r} &= 0 \\ \dot{T}'_{\theta r,r} + \frac{\dot{T}'_{\theta\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{\theta z,z} + \frac{2\dot{T}'_{r\theta}}{r} - \frac{\dot{u}_{,\theta}}{r} &= 0 \\ \dot{T}'_{zr,r} + \frac{\dot{T}'_{z\theta,\theta}}{r} + \dot{T}'_{zz,z} + \frac{\dot{T}'_{rz}}{r} - \dot{u}_{,z} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1 : \text{再掲})$$

境界条件：

$$\dot{T}'_{rr} = \dot{u}, \quad \dot{T}'_{\theta r} = 0, \quad \dot{T}'_{zr} = -qL_{rz} \quad \text{on } r = R_O, R_I \quad (6.13 : \text{再掲})$$

$$\dot{T}'_{rz} = 0, \quad \dot{T}'_{\theta z} = 0, \quad v_z = 0 \quad \text{on } z = \pm H \quad (6.14 : \text{再掲})$$

なお、伸張試験の場合、式 (6.13)<sub>3</sub> は次式で与えられる。

$$\dot{T}'_{zr} = qL_{rz} \quad \text{on } r = R_O, R_I$$

#### 6. 2. 4 構成式

水－土骨格連成を考慮すると，間隙水の連続条件より，

$$\text{tr } \mathbf{D} = 0 \quad (6.15)$$

の条件が得られる．式 (6.15) を考慮すると，式 (2.86) は次式のように変形できる．

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} \\ \dot{T}'_{r\theta} &= 2\mu D_{r\theta} \\ \dot{T}'_{\theta z} &= 2\mu D_{\theta z} \end{aligned} \quad (6.16)$$

ここで， $\mu^*$ ， $\mu$  はそれぞれ 45 度せん断におけるせん断係数，単純せん断係数で，次式で与えられる．

$$\mu^* = \frac{\tilde{h}\tilde{G}}{\tilde{h} + \tilde{G}}, \quad \mu = \frac{\tilde{h}_1\tilde{G}}{\tilde{h}_1 + \tilde{G}} \quad (6.17)$$

式 (6.16) に  $\dot{T}' = \dot{T}' - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$  を代入すると，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{D_{zz} - \frac{1}{2}(D_{rr} + D_{\theta\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(D_{rr} - D_{\theta\theta}) \\ \dot{T}'_{rz} &= 2\mu D_{rz} - qW_{rz} \\ \dot{T}'_{r\theta} &= 2\mu D_{r\theta} \\ \dot{T}'_{\theta z} &= 2\mu D_{\theta z} - qW_{\theta z} \end{aligned} \quad (6.18)$$

となり，速度場を用いて表すと，

$$\begin{aligned} \dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta}) &= 2\mu^* \{v_{z,z} - \frac{1}{2}(v_{r,r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}v_{\theta,\theta})\} \\ \dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2\mu(v_{r,r} - \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r}v_{\theta,\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\
\dot{T}'_{r\theta} &= \mu\left(\frac{1}{r}v_{r,\theta} - \frac{1}{r}v_{\theta} + v_{\theta,r}\right) \\
\dot{T}'_{\theta z} &= \mu\left(v_{\theta,z} + \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) - \frac{1}{2}q\left(v_{\theta,z} - \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

となる.

#### 6. 2. 5 速度場の導入

上下端面の境界条件を考える. 速度 $v$ を用いると, 式 (6.14) <sub>1</sub>は,

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{rz} &= \mu(v_{r,z} + v_{z,r}) - \frac{1}{2}q(v_{r,z} - v_{z,r}) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}q\right)v_{r,z} + \left(\mu + \frac{1}{2}q\right)v_{z,r} (= 0)
\end{aligned}$$

と表され,  $v_{z,r} = 0$  (固定着の条件) を考慮すると, 式 (6.14) <sub>1</sub>の上下端面の境界条件は,

$$v_{r,z} = 0, \quad (2\mu - q \neq 0) \tag{6.20}$$

となる. 式 (6.14) <sub>2</sub>は,

$$\begin{aligned}
\dot{T}'_{\theta z} &= \mu\left(v_{\theta,z} + \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) - \frac{1}{2}q\left(v_{\theta,z} - \frac{1}{r}v_{z,\theta}\right) \\
&= \left(\mu - \frac{1}{2}q\right)v_{\theta,z} + \left(\mu + \frac{1}{2}q\right)\frac{1}{r}v_{z,\theta} (\neq 0)
\end{aligned}$$

と表され,  $v_{z,\theta} = 0$  (固定着の条件) を考慮すると, 式 (6.14) <sub>2</sub>の上下端面の境界条件は,

$$v_{\theta,z} = 0, \quad (2\mu - q \neq 0) \tag{6.21}$$

となる. 式 (6.14) <sub>3</sub>, 式 (6.20), および式 (6.21) の上下端面の境界条件および $\theta$ 方向の連続条件を考えて速度場を以下のように仮定する.

$$\begin{aligned}
v_r &= V_r(r) \cos(n\theta) \sin(k_m z) \\
v_\theta &= V_\theta(r) \sin(n\theta) \sin(k_m z) \\
v_z &= V_z(r) \cos(n\theta) \cos(k_m z)
\end{aligned} \tag{6.22}$$

ここで,  $k_m = \frac{m\pi}{2H}$  ( $m=1,2,\dots$ ) である. 以下, 式の簡略化のため  $V_r(r)$ ,  $V_\theta(r)$ , および  $V_z(r)$  をそれぞれ,  $V_r$ ,  $V_\theta$ , および  $V_z$  と表わすことにする.  
式 (6.15) より,  $V_z$  は次式で表わせる.

$$V_z = \frac{1}{k} (V_r' + \frac{1}{r} V_r + \frac{n}{r} V_\theta) \quad (6.23)$$

## 6. 2. 6 支配方程式の分類

最終的に増分釣合式から, 速度場は次の支配方程式を満足しなければならない.

$$L_1(L_2(V_\theta)) - L_3\psi = 0 \quad (6.24)$$

$$L_4\psi = 0 \quad (6.25)$$

ここで,  $L_i$  ( $i=1\sim 4$ ) は次のような微分演算子である.

$$L_1(\ ) = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_1^2 k_m^2 r^2)\}(\ )$$

$$L_2(\ ) = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 3r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_2^2 k_m^2 r^2)\}(\ )$$

$$L_3(\ ) = \{(\frac{2b+2\mu}{a} - \rho_3^2) k_m^2 r^3 \frac{d}{dr} + (\frac{2b-2\mu}{a} - 3\rho_3^2) k_m^2 r^2\}(\ )$$

$$L_4(\ ) = \{r^2 \frac{d^2}{dr^2} - r \frac{d}{dr} + (1 - n^2 + \rho_3^2 k_m^2 r^2)\}(\ )$$

また,

$$\psi = \frac{d}{dr}(rV_\theta) + nV_r \quad (6.26)$$

であり,  $\rho_i$  ( $i=1,2,3$ ) は次式で与えられる.

$$\rho_1^2, \rho_2^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \rho_3^2 = -\frac{c}{2\mu} \quad (6.27)$$

ここで,  $a$ ,  $b$ , および  $c$  は次式で与えられる.

$$a = 2\mu + q, \quad b = -(3\mu^* - \mu), \quad c = 2\mu - q \quad (6.28)$$

$\rho_1$ ,  $\rho_2$ , および  $\rho_3$  は次式を満足することに他ならない.

$$a\rho_i^4 - 2b\rho_i^2 + c = 0, \quad (i=1,2) \quad (6.29)$$

$$2\mu\rho_3^2 + c = 0 \quad (6.30)$$

式 (6.25) より,  $\psi$  の一般解は次式となる.

$$\psi = c_3 r J_n(\rho_3 k_m r) + c_6 r Y_n(\rho_3 k_m r) \quad (6.31)$$

ここで,  $J_n$  ( $n=0,1,\dots$ ) は第  $n$  次の第 1 種ベッセル関数,  $Y_n$  ( $n=0,1,\dots$ ) は第  $n$  次の第 2 種ベッセル関数であり,  $c_3$ ,  $c_6$  は未定定数である.

式 (6.24) は,  $V_\theta$  の支配方程式とみなせ,  $V_\theta$  の斉次解は次式となる.

$$V_\theta = \frac{c_1}{r} J_n(\rho_1 k_m r) + \frac{c_2}{r} J_n(\rho_2 k_m r) + \frac{c_4}{r} Y_n(\rho_1 k_m r) + \frac{c_5}{r} Y_n(\rho_2 k_m r) \quad (6.32)$$

ここで,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_4$  および  $c_5$  は未定定数である.

また,  $V_\theta$  の特解は,

$$V_\theta = \frac{c_3}{\rho_3^2 k_m^2} \frac{d}{dr} J_n(\rho_3 k_m r) + \frac{c_6}{\rho_3^2 k_m^2} \frac{d}{dr} Y_n(\rho_3 k_m r) \quad (6.33)$$

となる. 式 (6.26) と式 (6.23) より,  $V_r$ ,  $V_\theta$ , および  $V_z$  は次式のように置くことができる.

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 J_n(\rho_2 k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} J_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad - \frac{d}{dr} \{c_4 Y_n(\rho_1 k_m r) + c_5 Y_n(\rho_2 k_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} Y_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 J_n(\rho_2 k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} J_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad + \frac{n}{r} \{c_4 Y_n(\rho_1 k_m r) + c_5 Y_n(\rho_2 k_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} Y_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 \rho_1^2 J_n(\rho_1 k_m r) + c_2 \rho_2^2 J_n(\rho_2 k_m r)\} + k_m \{c_4 \rho_1^2 Y_n(\rho_1 k_m r) + c_5 \rho_2^2 Y_n(\rho_2 k_m r)\} \end{aligned} \quad (6.34)$$

ここで,  $\frac{c_3}{\rho_3^2 k_m^2}$ ,  $\frac{c_6}{\rho_3^2 k_m^2}$  をそれぞれ新たに  $c_3$ ,  $c_6$  と置き換えた.

$a$ ,  $b$ , および  $c$  は, 供試体内の応力の変化にともない変化するので式 (6.29) の実数解の存在個数が異なり, 実数解の存在個数が 0, 2, および 4 個に対応して支配方程式はそれぞれ楕円型 (E), 放物型 (P), および双曲型 (H) に分類される. なお, 楕円領域はさらに二つの領域に分類でき 4 つの複素数解の場合を (EC), 4 つの虚数解の場合を (EI) とする. それぞれの領域の判別条件は次式で与えられる.

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} < 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{EI 領域}$$

$$b^2 - ac < 0 \quad \text{EC 領域}$$

$$b^2 - ac > 0, \quad \frac{b}{a} > 0, \quad 2\mu > |\bar{q}| \quad \text{H 領域}$$

$$2\mu < |\bar{q}| \quad \text{P 領域}$$

## 6. 2. 7 分岐条件式

### 6. 2. 7. 1 EC 領域の分岐条件式

EC 領域では, 式 (6.29) における根は, 共役な複素数であり,  $P \pm iQ$ ,  $-P \pm iQ$  ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) とおくと  $P$ ,  $Q$  の間には次の関係式が成り立つ.

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (6.35)$$

また, 速度場の一般解は  $\rho_1, \bar{\rho}_1 = P \pm iQ$  として,

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad - \frac{d}{dr} \{c_4 Y_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_4 Y_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad + \frac{n}{r} \{c_4 Y_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_4 Y_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 \rho_1^2 J_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_1 \bar{\rho}_1^2 J_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} + k_m \{c_4 \rho_1^2 Y_n(\rho_1 k_m r) + \bar{c}_4 \bar{\rho}_1^2 Y_n(\bar{\rho}_1 k_m r)\} \end{aligned} \quad (6.36)$$

ここで,  $c_1$  と  $\bar{c}_1$ ,  $c_4$  と  $\bar{c}_4$  が共役な複素数の未定定数で,  $c_3$ ,  $c_6$  は実数の未定定数である. また,  $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた.  $\Im[\dots]$  は  $[\dots]$  の虚数部分である.

式 (6.36) を側面の境界条件, 式 (6.13) に代入すると次式が得られる.

$$\begin{aligned}
&\xi_1^j(\rho_1, R_0)c_1 + \xi_1^j(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_1 + \xi_4^j(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_1^Y(\rho_1, R_0)c_4 + \xi_1^Y(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_4 + \xi_4^K(\rho_3, R_0)c_6 = 0 \\
&\xi_2^j(\rho_1, R_0)c_1 + \xi_2^j(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_1 + \xi_5^j(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_2^Y(\rho_1, R_0)c_4 + \xi_2^Y(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_4 + \xi_5^K(\rho_3, R_0)c_6 = 0 \\
&\xi_3^j(\rho_1, R_0)c_1 + \xi_3^j(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_1 + \xi_6^j(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_3^Y(\rho_1, R_0)c_4 + \xi_3^Y(\bar{\rho}_1, R_0)\bar{c}_4 + \xi_6^K(\rho_3, R_0)c_6 = 0 \\
&\xi_1^j(\rho_1, R_I)c_1 + \xi_1^j(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_1 + \xi_4^j(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_1^Y(\rho_1, R_I)c_4 + \xi_1^Y(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_4 + \xi_4^K(\rho_3, R_I)c_6 = 0 \\
&\xi_2^j(\rho_1, R_I)c_1 + \xi_2^j(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_1 + \xi_5^j(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_2^Y(\rho_1, R_I)c_4 + \xi_2^Y(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_4 + \xi_5^K(\rho_3, R_I)c_6 = 0 \\
&\xi_3^j(\rho_1, R_I)c_1 + \xi_3^j(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_1 + \xi_6^j(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_3^Y(\rho_1, R_I)c_4 + \xi_3^Y(\bar{\rho}_1, R_I)\bar{c}_4 + \xi_6^K(\rho_3, R_I)c_6 = 0
\end{aligned} \tag{6.37}$$

上式において  $c_1, \bar{c}_1, c_4, \bar{c}_4, c_3$  および  $c_6$  の非自明な解が存在するとき分岐が生じる。ただし,  $\xi_i^j, \xi_i^Y$  ( $i=1,2,3$ ),  $\xi_j^l, \xi_j^K$  ( $j=4,5,6$ ) は次式で与えられる関数である。

$$\begin{aligned}
\xi_1^j(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) - \{a(1 + \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] J_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_2^j(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1) J_n(\rho k_m r) - \rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_3^j(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 - \rho^2) \{n J_n(\rho k_m r) - \rho k_m r J_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_4^l(\rho, r) &= \frac{4k_m n}{r^2} \mu \{\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + (n-1) I_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_5^l(\rho, r) &= \frac{1}{r^2} [-2\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + \{2(n^2 - n) + \rho^2 k_m^2 r^2\} I_n(\rho k_m r)] \\
\xi_6^l(\rho, r) &= \frac{k_m n}{r} I_n(\rho k_m r) \\
\xi_1^Y(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r Y_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) - \{a(1 + \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] Y_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_2^Y(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1) Y_n(\rho k_m r) - \rho k_m r Y_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_3^Y(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 - \rho^2) \{n Y_n(\rho k_m r) - \rho k_m r Y_{n+1}(\rho k_m r)\} \\
\xi_4^K(\rho, r) &= \frac{4k_m n}{r^2} \mu \{\rho k_m r K_{n+1}(\rho k_m r) + (n-1) K_n(\rho k_m r)\} \\
\xi_5^K(\rho, r) &= \frac{1}{r^2} [-2\rho k_m r K_{n+1}(\rho k_m r) + \{2(n^2 - n) + \rho^2 k_m^2 r^2\} K_n(\rho k_m r)] \\
\xi_6^K(\rho, r) &= \frac{k_m n}{r} K_n(\rho k_m r)
\end{aligned}$$

## 6. 2. 7. 2 EI 領域の分岐条件式

EI 領域では, 式 (6.29) における根は, 虚数であり,  $\pm iP, \pm iQ$  ( $P > 0, Q > 0, P < Q$ ) とおくと  $P, Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = -\frac{2b}{a} \quad (6.38)$$

また、速度場の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 I_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad - \frac{d}{dr} \{c_4 K_n(Pk_m r) + c_5 K_n(Qk_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 I_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad + \frac{n}{r} \{c_4 K_n(Pk_m r) + c_5 K_n(Qk_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= -k_m \{c_1 P^2 I_n(Pk_m r) + c_2 Q^2 I_n(Qk_m r)\} - k_m \{c_4 P^2 K_n(Pk_m r) + c_5 Q^2 K_n(Qk_m r)\} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ここで、 $c_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) は実数の未定定数であり、 $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた。

式 (6.39) を側面の境界条件、式 (6.13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \xi_1^I(P, R_0)c_1 + \xi_1^I(Q, R_0)c_2 + \xi_1^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_1^K(P, R_0)c_4 + \xi_1^K(Q, R_0)c_5 + \xi_1^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_2^I(P, R_0)c_1 + \xi_2^I(Q, R_0)c_2 + \xi_2^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_2^K(P, R_0)c_4 + \xi_2^K(Q, R_0)c_5 + \xi_2^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_3^I(P, R_0)c_1 + \xi_3^I(Q, R_0)c_2 + \xi_3^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_3^K(P, R_0)c_4 + \xi_3^K(Q, R_0)c_5 + \xi_3^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_1^I(P, R_l)c_1 + \xi_1^I(Q, R_l)c_2 + \xi_1^I(\rho_3, R_l)c_3 + \xi_1^K(P, R_l)c_4 + \xi_1^K(Q, R_l)c_5 + \xi_1^K(\rho_3, R_l)c_6 &= 0 \\ \xi_2^I(P, R_l)c_1 + \xi_2^I(Q, R_l)c_2 + \xi_2^I(\rho_3, R_l)c_3 + \xi_2^K(P, R_l)c_4 + \xi_2^K(Q, R_l)c_5 + \xi_2^K(\rho_3, R_l)c_6 &= 0 \\ \xi_3^I(P, R_l)c_1 + \xi_3^I(Q, R_l)c_2 + \xi_3^I(\rho_3, R_l)c_3 + \xi_3^K(P, R_l)c_4 + \xi_3^K(Q, R_l)c_5 + \xi_3^K(\rho_3, R_l)c_6 &= 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

上式において  $c_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) の非自明な解が存在するとき分岐が生じる。ただし、 $\xi_i^I$ ,  $\xi_i^K$  ( $i=1,2,3$ ) は次式で与えられる関数である。

$$\begin{aligned} \xi_1^I(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) + \{a(1 - \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] I_n(\rho k_m r)\} \\ \xi_2^I(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1) I_n(\rho k_m r) - \rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r)\} \\ \xi_3^I(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 + \rho^2) \{n I_n(\rho k_m r) - \rho k_m r I_{n+1}(\rho k_m r)\} \\ \xi_1^K(\rho, r) &= \frac{k_m}{r^2} \{4\mu\rho k_m r K_{n+1}(\rho k_m r) + [4\mu(n^2 - n) + \{a(1 - \rho^2) - 2b\}\rho^2 k_m^2 r^2] K_n(\rho k_m r)\} \\ \xi_2^K(\rho, r) &= \frac{2n}{r^2} \{(n-1) K_n(\rho k_m r) - \rho k_m r K_{n+1}(\rho k_m r)\} \\ \xi_3^K(\rho, r) &= \frac{k_m}{r} (1 + \rho^2) \{n K_n(\rho k_m r) - \rho k_m r K_{n+1}(\rho k_m r)\} \end{aligned}$$



### 6. 2. 7. 3 P 領域の分岐条件式

P 領域では、式 (6.29) における根のうち実数解を  $\pm P$ ，虚数解を  $\pm iQ$  ( $P > 0$ ， $Q > 0$ ) とおくと  $P$ ， $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2b}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (6.41)$$

また、速度場の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned} V_r &= -\frac{d}{dr} \{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad - \frac{d}{dr} \{c_4 Y_n(Pk_m r) + c_5 K_n(Qk_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_\theta &= \frac{n}{r} \{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 I_n(Qk_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\ &\quad + \frac{n}{r} \{c_4 Y_n(Pk_m r) + c_5 K_n(Qk_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} K_n(\rho_3 k_m r) \\ V_z &= k_m \{c_1 P^2 J_n(Pk_m r) - c_2 Q^2 I_n(Qk_m r)\} + k_m \{c_4 P^2 Y_n(Pk_m r) - c_5 Q^2 K_n(Qk_m r)\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

ここで、 $c_i$  ( $i=1,2,3$ ) は実数の未定定数であり、 $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた。

式 (6.42) を側面の境界条件、式 (6.13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \xi_1^I(P, R_0)c_1 + \xi_1^I(Q, R_0)c_2 + \xi_1^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_1^Y(P, R_0)c_4 + \xi_1^K(Q, R_0)c_5 + \xi_1^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_2^I(P, R_0)c_1 + \xi_2^I(Q, R_0)c_2 + \xi_2^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_2^Y(P, R_0)c_4 + \xi_2^K(Q, R_0)c_5 + \xi_2^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_3^I(P, R_0)c_1 + \xi_3^I(Q, R_0)c_2 + \xi_3^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_3^Y(P, R_0)c_4 + \xi_3^K(Q, R_0)c_5 + \xi_3^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\ \xi_1^I(P, R_I)c_1 + \xi_1^I(Q, R_I)c_2 + \xi_1^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_1^Y(P, R_I)c_4 + \xi_1^K(Q, R_I)c_5 + \xi_1^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0 \\ \xi_2^I(P, R_I)c_1 + \xi_2^I(Q, R_I)c_2 + \xi_2^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_2^Y(P, R_I)c_4 + \xi_2^K(Q, R_I)c_5 + \xi_2^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0 \\ \xi_3^I(P, R_I)c_1 + \xi_3^I(Q, R_I)c_2 + \xi_3^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_3^Y(P, R_I)c_4 + \xi_3^K(Q, R_I)c_5 + \xi_3^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

上式において  $c_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) の非自明な解が存在するとき分岐が生じる。

### 6. 2. 7. 4 H 領域の分岐条件式

H 領域では、式 (6.29) における根は実数であり  $\pm P$ ， $\pm Q$  ( $P > 0$ ， $Q > 0$ ， $P > Q$ ) とおくと  $P$ ， $Q$  の間には次の関係式が成り立つ。

$$P^2 - Q^2 = \frac{2\sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad P^2 + Q^2 = \frac{2b}{a} \quad (6.44)$$

また、速度場の一般解は次式となる。

$$\begin{aligned}
V_r &= -\frac{d}{dr}\{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 J_n(Qk_m r)\} - c_3 \frac{n}{r} I_n(\rho_3 k_m r) \\
&\quad - \frac{d}{dr}\{c_4 Y_n(Pk_m r) + c_5 Y_n(Qk_m r)\} - c_6 \frac{n}{r} K_n(\rho_3 k_m r) \\
V_\theta &= \frac{n}{r}\{c_1 J_n(Pk_m r) + c_2 J_n(Qk_m r)\} + c_3 \frac{d}{dr} I_n(\rho_3 k_m r) \\
&\quad + \frac{n}{r}\{c_4 Y_n(Pk_m r) + c_5 Y_n(Qk_m r)\} + c_6 \frac{d}{dr} K_n(\rho_3 k_m r) \\
V_z &= k_m \{c_1 P^2 J_n(Pk_m r) + c_2 Q^2 J_n(Qk_m r)\} + k_m \{c_4 P^2 Y_n(Pk_m r) + c_5 Q^2 Y_n(Qk_m r)\}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

ここで、 $c_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) は実数の未定定数であり、 $\rho_3 = \Im[\rho_3]$  とおいた。

式 (6.45) を側面の境界条件、式 (6.13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\xi_1^J(P, R_0)c_1 + \xi_1^J(Q, R_0)c_2 + \xi_4^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_1^Y(P, R_0)c_4 + \xi_1^Y(Q, R_0)c_5 + \xi_4^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\
\xi_2^J(P, R_0)c_1 + \xi_2^J(Q, R_0)c_2 + \xi_5^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_2^Y(P, R_0)c_4 + \xi_2^Y(Q, R_0)c_5 + \xi_5^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\
\xi_3^J(P, R_0)c_1 + \xi_3^J(Q, R_0)c_2 + \xi_6^I(\rho_3, R_0)c_3 + \xi_3^Y(P, R_0)c_4 + \xi_3^Y(Q, R_0)c_5 + \xi_6^K(\rho_3, R_0)c_6 &= 0 \\
\xi_1^J(P, R_I)c_1 + \xi_1^J(Q, R_I)c_2 + \xi_4^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_1^Y(P, R_I)c_4 + \xi_1^Y(Q, R_I)c_5 + \xi_4^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0 \\
\xi_2^J(P, R_I)c_1 + \xi_2^J(Q, R_I)c_2 + \xi_5^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_2^Y(P, R_I)c_4 + \xi_2^Y(Q, R_I)c_5 + \xi_5^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0 \\
\xi_3^J(P, R_I)c_1 + \xi_3^J(Q, R_I)c_2 + \xi_6^I(\rho_3, R_I)c_3 + \xi_3^Y(P, R_I)c_4 + \xi_3^Y(Q, R_I)c_5 + \xi_6^K(\rho_3, R_I)c_6 &= 0
\end{aligned} \tag{6.46}$$

上式において  $c_i$  ( $i=1,2,\dots,6$ ) の非自明な解が存在するとき分岐が生じる。

### 6. 3 分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比

前節では中空円柱供試体の側水圧一定条件下での分岐荷重の理論解を与える分岐条件式を導いた。本節では得られた分岐荷重の解析結果を示し、その物理的考察を行う。

解析にあたって、用いる土質パラメータは前章同様、関口<sup>3)</sup>の三軸試験の結果より、次の値を用いるものとする。

$$\lambda = 0.231, \quad \kappa = 0.042, \quad \nu = 0.333, \quad M = 1.430, \quad e = 1.5$$

また、非共軸モデルの場合、非共軸パラメータ  $A$  の値については、

$$A = 0.01$$

を用いる。

分岐条件式は、分岐荷重  $q/p'$ 、分岐時の供試体寸法比  $R_o/H$ 、内外半径比  $R_i/R_o$ 、変形モード  $m$ 、 $n$ 、非共軸パラメータ  $A$  の陰関数で与えられるので、変形モードと非共軸パラメータを与えることにより、「分岐荷重」と「供試体寸法比」の関係が得られる。

本報告においては、中空円柱供試体として、 $R_i/R_o = 0.5$  の肉厚のタイプと  $R_i/R_o = 0.9$  の薄肉のタイプを考える。なお、変形モードとして軸対称の 2 次のバルジ型、非軸対称の 1 次の座屈型を考える。

図 6.2、図 6.3 に共軸および非共軸 Cam-clay モデルの場合における「分岐荷重」と分岐時の「供試体寸法比」の関係を示す。図 6.2 は軸対称バルジ型、図 6.3 は非軸対称座屈型の場合である。

肉厚 ( $R_i/R_o = 0.5$ ) 中空円柱供試体の場合について考える。軸対称バルジ型 ( $n = 0$ ,  $m = 2$ ) の分岐荷重は、共軸モデルにおいては存在するが極めてかぎられた供試体寸法比 ( $R_o/H \approx 1.6$ ) の場合に限られる。しかし、非共軸モデルにおいては供試体寸法比によらず分岐荷重が存在し、様々な供試体寸法比で軸対称バルジ型の分岐が生じることが分かる。特に  $R_o/H$  が大きい場合、バルジ型の分岐荷重が存在し得ることから、非共軸モデルのほうが実際現象をよく説明していることが分かる。

薄肉 ( $R_i/R_o = 0.9$ ) 中空円柱供試体の場合における軸対称バルジ型の分岐荷重について考える。共軸モデルの場合も、様々な供試体寸法比で分岐荷重が存在しているが、非共軸モデルの方が分岐荷重は低いことが分かる。

中空円柱供試体と中実円柱供試体の分岐の顕著な違いは軸対称バルジ型の場合に現れている。実際には中空円柱供試体の軸対称のバルジ型は 2 つのタイプが存在する。図 6.4 に  $R_i/R_o = 0.9$  の薄肉の場合における軸対称 2 次の分岐荷重をそれぞれ示す。図 6.4 の点線は

片側断面（側壁）が座屈型となるタイプ(図 6.5 参照)で、図 6.4 の実線は片側断面がバルジ型となるタイプ(図 6.6 参照)である。

中空円柱供試体の場合における非軸対称座屈型 ( $n=1, m=1$ ) の分岐荷重も、前章同様考え、共軸モデルに比べて非共軸モデルの方が、分岐荷重が低いことが分かる。

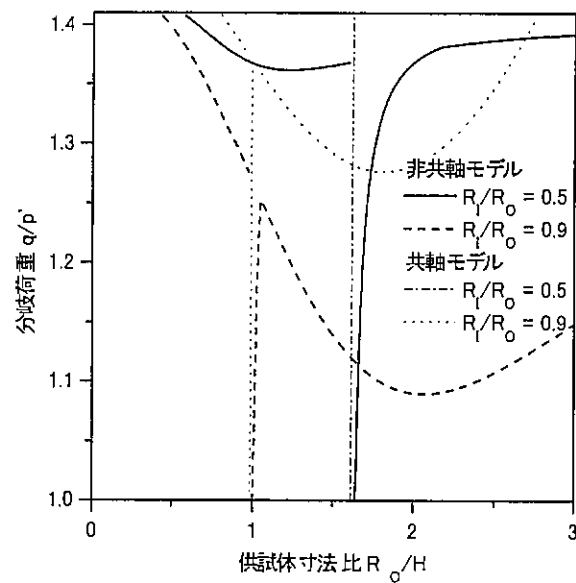


図 6.2 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(中空円柱供試体軸対称バルジ型  $n=0, m=2$ )

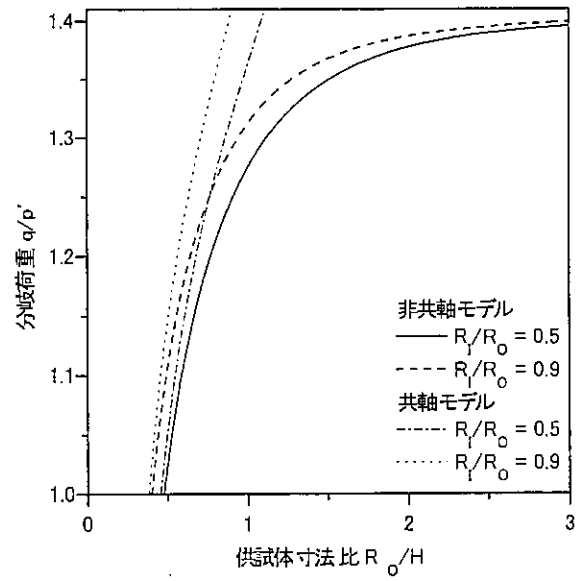


図 6.3 「分岐荷重～供試体寸法比」の関係  
(中空円柱供試体非軸対称座屈型  $n = 1$ ,  $m = 1$ )

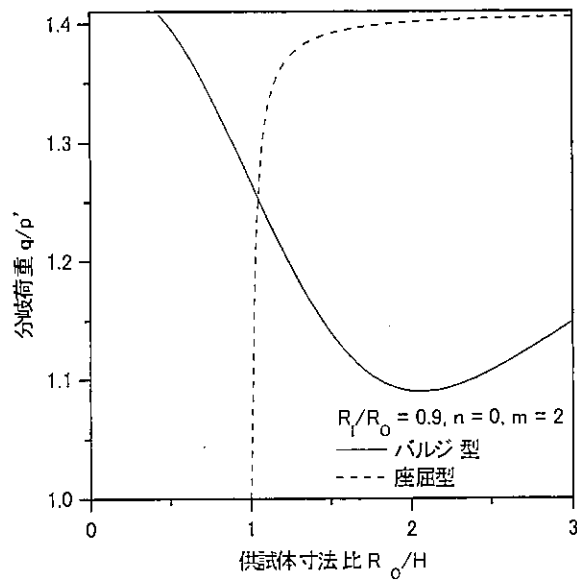


図 6.4 軸対称バルジ型の分類

## 6. 4 最大せん断ひずみとすべり面の発生位置に関する考察

圧縮試験における非共軸 Cam-clay モデル中空円柱供試体の分岐時の最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布を求め、各変形モードにおけるすべり面の発生位置について考察する。図 6.5 から図 6.7 は、横軸に半径方向  $r$  ( $0 \leq r \leq R_0$ )、縦軸に供試体高さ方向  $z$  ( $-H \leq z \leq H$ ) をとる。

また、各々の供試体は  $H=1$  とした。(a) は分岐解の変形モード概形図である。(b) は最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の分布図で、色の濃い部分で最大せん断ひずみが大きく、薄い部分で小さいことを示している。なお変形図は分岐時の非均一解による変形のみを表しており、実際の変形図は、すべての領域で負荷となる自明な均一解の変形を加える必要がある。

図 6.5, 図 6.6 では、軸対称変形を考えているので、 $\theta$  が一定で切り取られる片側断面を、また、図 6.7 では非軸対称となるので全断面を示している。

図 6.5 は  $n=0, m=2, R_0/H=2$  の場合である。変形モード概形は図 6.5 (a) に示すような一般にバルジと呼ばれるような中央部が膨らむ型を考える。また内側面も外側面と同じ挙動をしており、断面片側は座屈の型を成している。図 6.5 (b) では、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  の最大は外側面の上下端近傍となっていることが分かる。したがって、このような供試体寸法比、変形モードの場合、外側面の上下端から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図 6.6 は  $n=0, m=2, R_0/H=1$  の場合である。変形モード概形は図 6.6 (a) に示すような中央部が膨らむバルジ型である。中空円柱外形は図 6.5 と同じバルジであるが、内側面が内側に膨らんでおり断面片側はバルジの型を成している。図 6.6 (b) より、このような変形モードの場合、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  は外側面の中央の膨らんだ部分において最大となることが分かる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、外側面の中央部がから最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

図 6.7 は  $n=1, m=1, R_0/H=1$  の場合である ( $\theta=0$  および  $\theta=\pi$  での断面) 他の断面では最大せん断ひずみは大きくない。変形モード概形は図 6.7 (a) に示すような座屈型である。また、断面両側とも座屈型となっている。図 6.7 (b) より、このような供試体寸法比、変形モードの場合、最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  は供試体側面の左下および右上において最大となることが分かる。ゆえにこのような供試体寸法比、変形モードの場合、供試体側面の左下および右上から最もすべり面が発生しやすいと考えられる。

これらの結果より最大せん断ひずみ  $\Gamma_{\max}$  が最大になる位置は、変形モードおよび供試体寸法比等の違いにより異なっていることが分かる。

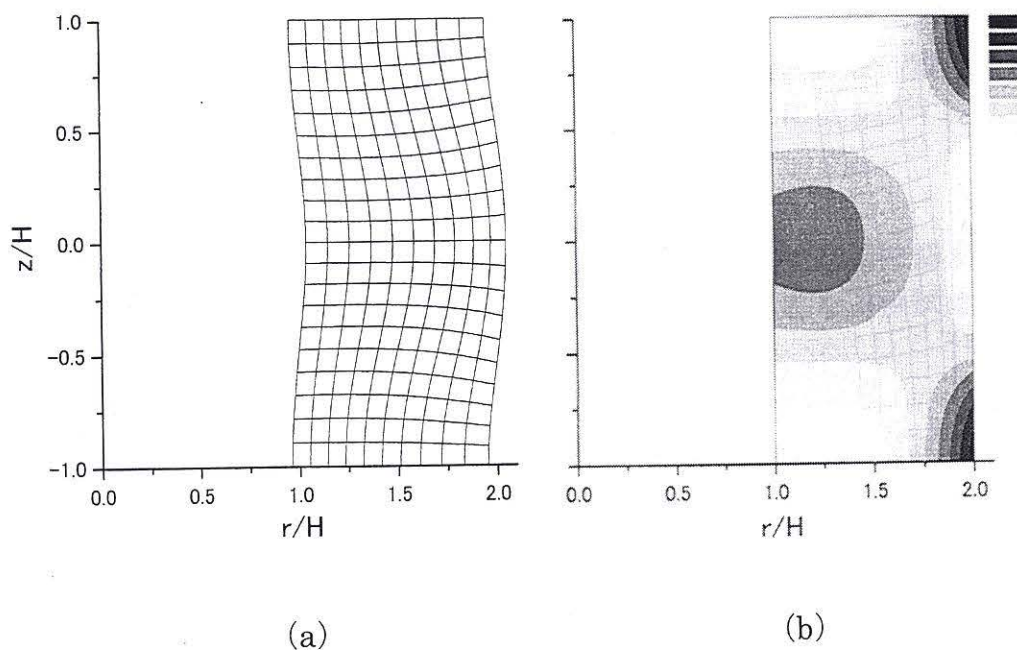


図 6.5 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図 ( $n=0, m=2, R_0/H=2$ )

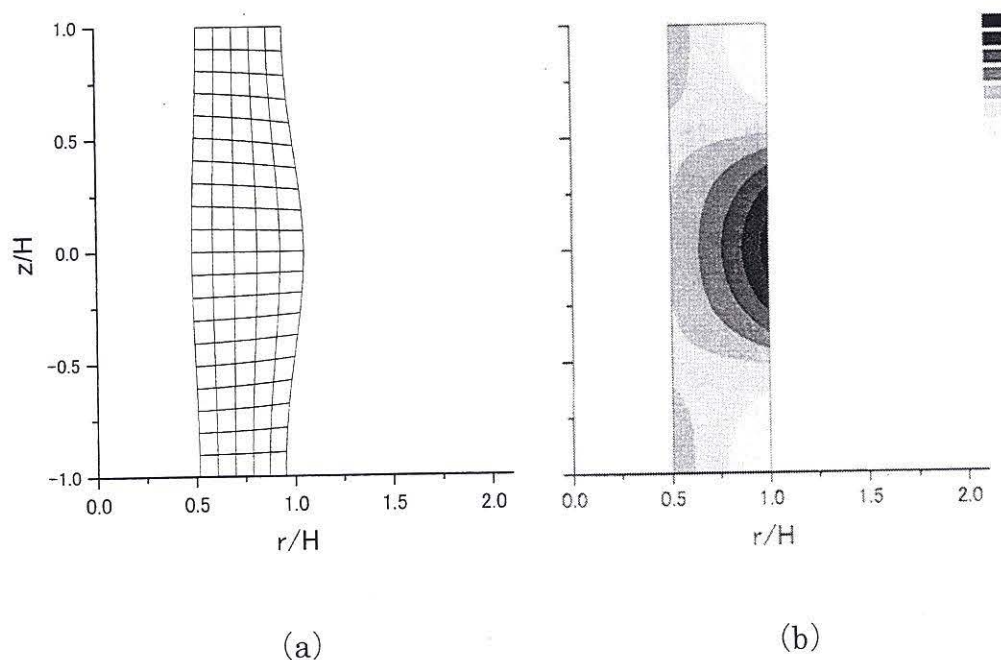
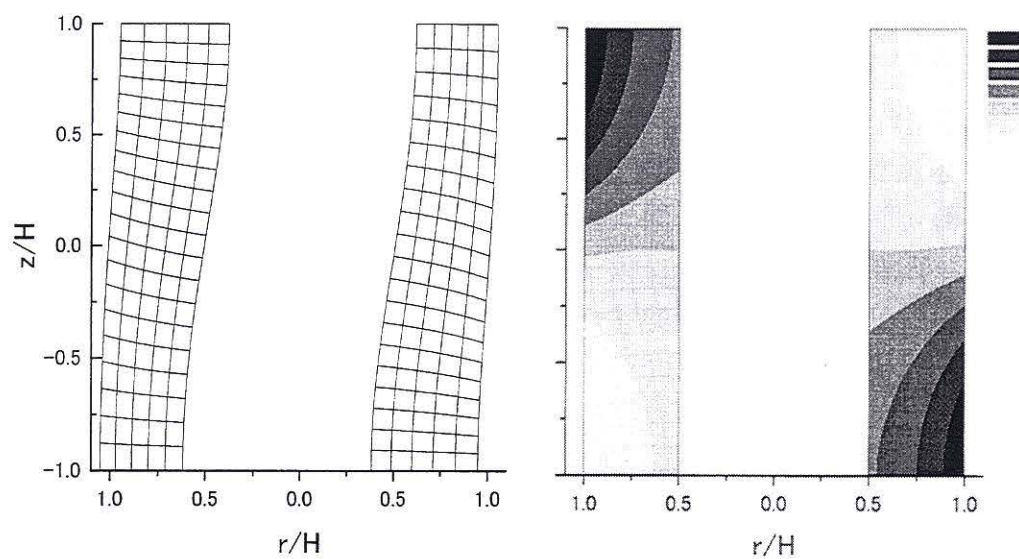


図 6.6 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図 ( $n=0, m=2, R_0/H=1$ )



(a)

(b)

図 6.7 分岐解の変形モード概形図および最大せん断ひずみ図 ( $n=1, m=1, R_0/H=1$ )



## 6. 5 結論

本章では，共軸および非共軸 Cam-clay モデルを用いた中空円柱供試体の軸対称および非軸対称分岐解析を行うことにより，まず，分岐条件式を求め，分岐荷重と変形モードとの関係を議論した．次に最大せん断ひずみの分布を求めることにより，すべり面の発生位置について考察した．その結果次のような結論を得た．

- (1) 中空円柱供試体の場合，対称軸に関する対称性の他に片側断面に関する対称性も考慮する必要があり，軸対称モードの分岐荷重がかなり低くなる供試体寸法比が存在することが分かった．
- (2) 共軸 Cam-clay モデルでは肉厚な ( $R_i/R_o = 0.5$ ) 中空円柱供試体では，実際によく観察される軸対称のバルジ型の分岐荷重に限られた供試体寸法比しか存在しないが，非共軸モデルでは様々な供試体寸法比で存在した．すなわち，共軸モデルで説明できない実際現象を，非共軸モデルを用いることによって説明できた．
- (3) 非共軸項には，前結果と同様に分岐の促進効果がある事が確認できた．
- (4) せん断ひずみの卓越する位置，すなわちすべり面の生じやすい位置は供試体寸法比および変形モードによって異なることが分かった．

得られた理論解は  $n$  および  $m$  の高次の解も含んでいるが，中空円柱供試体の場合，視覚化の処理の問題で割愛した．なお，すべり面群の生成等の議論には高次の分岐解析が重要であることは言うまでもない．

## 参考文献（第6章）

- 1) 志比利秀, 矢富盟祥 : 「有限変形非共軸 Cam-clay モデルによる中空円柱供試体の非軸対称分岐解析」, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.1, pp.537-546, 1998.
- 2) Yatomi, C., Yashima, A., Iizuka, A., and Sano, I. : General theory of shear bands formation by a non-coaxial Cam-clay model, *Soils and foundations*, Vol.29, No.3, pp.41-53, 1989.
- 3) Sekiguchi, H. : Rheological characteristics of clays, *Proc. 9th ICSFME*, Tokyo, Vol.1, pp.289-291, 1977.
- 4) 例えば, 北川 浩 : 弾・塑性力学－非線形解析のための基礎理論－, 裳華房, 1987.

## 第7章 結論

本論文では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた供試体の分岐解析の理論解およびその結果に基づいて、発生すると思われる種々の変形モードおよびすべり面について考察したものである。

第2章では本論文で行う分岐解析の基礎となる理論を解説し、用いる弾塑性構成式を特に非共軸モデルについて詳しく説明した。最後に分岐の理論の説明を加えた。

第3章では、平面ひずみ条件下で側面の境界条件として側方水圧一定条件の下で上下端面において固定着の条件および摩擦なし、速度一定で圧縮および伸張した場合の共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた長方形供試体の分岐解析を行った。まず、分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比との関係を議論した。その結果、非共軸 Cam-clay モデルを用いる事により、高次の変形モードの分岐荷重も低次の変形モードの分岐荷重も大きな差異はなく実験で観察される様々な変形モードは、初期不整などを取り除いたとしても、供試体の材料非線型および幾何学的非線型の結果として現れる事がわかる。次に分岐解析から得られた速度場を用いて最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。最大せん断ひずみの分布より予測したすべり面の発生位置、およびすべり面の形状は、実際に実験で観察されるものと良く似ており、対象とする供試体の形状を円柱供試体とすれば三軸試験などで生じるすべり面をうまく表せる可能性を示唆した。

第4章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-clay モデルを用いた円柱形の供試体を考え、側面においては水圧一定条件を、上下端面においては固定着の条件および摩擦なし、速度一定で圧縮および伸張した場合の分岐解析を行った。ただし、供試体の変形は軸対称に限定して行った。まず、軸対称問題の分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比との関係を議論した。その結果、圧縮試験においては、共軸 Cam-clay モデルを用いた場合、分岐荷重が存在しないという結果が得られた。しかし、非共軸 Cam-clay モデルを用いることによって分岐荷重が得られた。つまり共軸 Cam-clay モデルでは軸対称のバルジのような変形が生じる事が説明できないが、非共軸 Cam-clay モデルを用いる事によってそのような現象が生じることも説明でき、非共軸 Cam-clay モデルが現実的であることが示せた。次に分岐解析から得られた速度場を用いて最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。しかし、実際には、すべり面は、何らかの非均一（分岐モード）変形後、「非軸対称」的に進行するのが普通であるから、以上の議論は、仮に初期に「軸対称・拡散分岐モード（Diffuse bifurcation mode）」の出現した場合に限って、速度勾配により定義した「最大せん断ひずみ」の概念を使って、初期すべり面の発生源となる可能性の高い位置を考察したものである。したがって、実際に生成されるすべり面の形状の予測には、非軸対称のせん断ひずみ分布が得られる「非軸対称分岐モード」の解析が必要となる。

第5章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-lay モデルを用いた円柱形の供試体を考え、側面においては水圧一定条件を、上下端面においては固定着の条件および摩擦なし、速度一定で圧縮した場合の非軸対称分岐解析を行った。まず、分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比との関係を議論した。共軸モデルでは、座屈型の分岐荷重のみが存在したが寸法比が限られている。一方、非共軸 Cam-clay モデルでは、同一の寸法比の供試体であっても、様々な変形モードの分岐荷重がほぼ同一の値で存在し、実際の三軸試験で観察されるような様々な変形を説明できることが分かった。次に分岐解析から得られた速度場を用いて最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。最大せん断ひずみの分布より予測したすべり面の発生位置、およびすべり面の形状は、実際に実験で観察されるものと良く似ており、網目状のすべり面群の生成および消滅は、高次の分岐モードの発生およびモードの飛び移り現象が生じた結果によるものと推察できることが分かった。

第6章では、共軸 Cam-clay モデルおよび非共軸 Cam-lay モデルを用いた中空円柱供試体を考え、側面においては水圧一定条件を、上下端面においては固定着の条件および摩擦なし、速度一定で圧縮した場合の分岐解析を行った。まず、分岐条件式の解析解を求め、分岐荷重と変形モードおよび供試体寸法比との関係を議論した。共軸 Cam-clay モデルでは肉厚の中空円柱供試体になるにつれ分岐荷重が存在する寸法比が限られてゆくが、非共軸 Cam-clay モデルでは寸法比にかかわらず様々な変形モードでの分岐荷重が存在するので実際現象をうまく説明できる。

また、円柱形供試体では軸対称モードの分岐荷重は一般的に非軸対称モードの分岐荷重に比べて高かったが、中空円柱供試体では軸対称モードの分岐荷重でもかなり低い分岐荷重を取る場合があることが分かった。次に分岐解析から得られた速度場を用いて最大せん断ひずみの分布を求めることにより、すべり面の発生位置について考察した。最大せん断ひずみの分布より予測したすべり面の発生位置、およびすべり面の形状は、実際に実験で観察されるものと良く似ており、最大せん断ひずみからのすべり面形態の推察は妥当であると考えられる。

## Appendix A 面積等について

図 A.1 に示すように、基準配置で  $dX_1$ ,  $dX_2$  を 2 辺とするような微小面積素  $dA$  が、現配置において  $dx_1$ ,  $dx_2$  を 2 辺とするような微小面積素  $da$  に変形するとき、それぞれ、次の様に書き表せる。

$$NdA = dX_1 \times dX_2, \quad nda = dx_1 \times dx_2 \quad (A.1)$$

ここで、 $N$ ,  $n$  はそれぞれ微小面積素  $dA$ ,  $da$  の単位法線である。

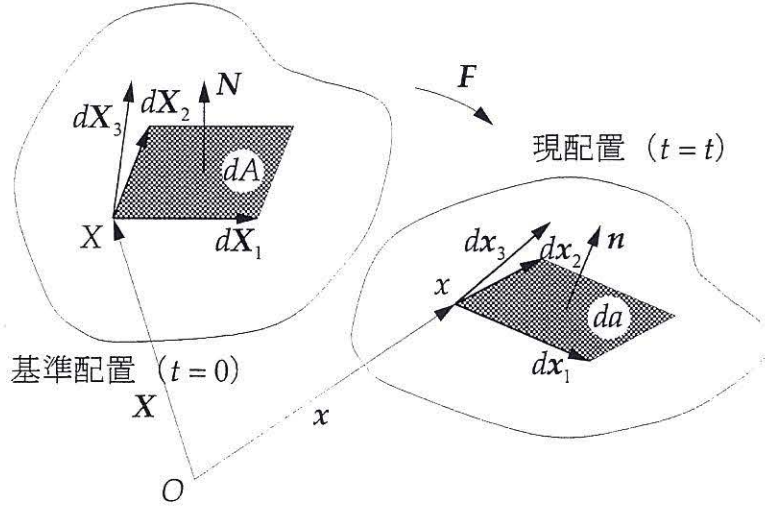


図 A.1 Nanson の公式の概念図

今、 $dx_1$ ,  $dx_2$  と一次独立な任意のベクトル  $dx_3$  を考え、式 (A.1)<sub>2</sub> と内積をとると、

$$\begin{aligned} dx_3 \cdot nda &= dx_3 \cdot dx_1 \times dx_2 \\ &= [dx_3, dx_1, dx_2] \\ &= [FdX_3, FdX_1, FdX_2] \\ &= \frac{[FdX_3, FdX_1, FdX_2]}{[dX_3, dX_1, dX_2]} [dX_3, dX_1, dX_2] \\ &= (\det F) [F^{-1} dx_3, dX_1, dX_2] \\ &= J F^{-1} dx_3 \cdot dX_1 \times dX_2 \\ &= J F^{-1} dx_3 \cdot NdA \\ &= dx_3 \cdot J F^{-T} NdA \end{aligned} \quad (A.2)$$

となる。ここで、 $dx_3$  の変形前のベクトルを  $dX_3$  とおいた。ゆえに、

$$nda = J F^{-T} NdA \quad (A.3)$$

となる．この式 (A.3) を Nanson の公式という．また， $nda$  の物質時間微分は  $(NdA)^\dot{=} = 0$  に注意して，

$$\begin{aligned}
(nda)^\dot{=} &= (JF^{-T}NdA)^\dot{=} \\
&= J(\text{tr } D)F^{-T}NdA + J\dot{F}^{-T}NdA \\
&= (\text{tr } D)nda + \dot{F}^{-T}F^Tnda \\
&= \{(\text{tr } D)I - F^{-T}\dot{F}^T\}nda \\
&= \{(\text{tr } D)I - (\dot{F}F^{-1})^T\}nda \\
&= \{(\text{tr } D)I - L^T\}nda
\end{aligned} \tag{A.4}$$

となる．次いで，面積素  $da$  の物質時間微分は，式 (A.1)<sub>2</sub> の両辺に  $\mathbf{n}$  を内積した後，物質時間微分をとることにより，

$$\begin{aligned}
(da)^\dot{=} &= (J\mathbf{n} \cdot F^{-T}NdA)^\dot{=} \\
&= J(\text{tr } D)\mathbf{n} \cdot F^{-T}NdA + J\dot{\mathbf{n}} \cdot F^{-T}NdA + J\mathbf{n} \cdot \dot{F}^{-T}NdA \\
&= (\text{tr } D)\mathbf{n} \cdot nda + \dot{\mathbf{n}} \cdot nda + \mathbf{n} \cdot \dot{F}^{-T}F^Tnda \\
&= (\text{tr } D)da + F\dot{F}^{-1}\mathbf{n} \cdot nda \\
&= (\text{tr } D - \dot{F}F^{-1}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})da \\
&= (\text{tr } D - \mathbf{n} \cdot L\mathbf{n})da \\
&= (\text{tr } D - \mathbf{n} \cdot D\mathbf{n})da
\end{aligned} \tag{A.5}$$

となる．最後に  $\mathbf{n}$  の物質時間微分は式 (A.4) と式 (A.5) を用いると

$$\begin{aligned}
\dot{nda} &= (nda)^\dot{=} - \mathbf{n}(da)^\dot{=} \\
&= \{(\text{tr } D)I - L^T\}nda - (\text{tr } D - \mathbf{n} \cdot D\mathbf{n})nda \\
&= \{(\mathbf{n} \cdot D\mathbf{n})I - L^T\}nda
\end{aligned} \tag{A.6}$$

と変形でき，ゆえに，

$$\dot{\mathbf{n}} = \{(\mathbf{n} \cdot D\mathbf{n})I - L^T\}\mathbf{n} \tag{A.7}$$

となる．

## Appendix B 水-土骨格連成問題における，均一変形状態がもたらす効果

間隙水の連続式より，

$$\text{tr } \boldsymbol{D} + \text{div } \boldsymbol{v}_w = 0 \quad (\text{B.1})$$

が得られる．ここで， $\boldsymbol{v}_w$  は土骨格に対する間隙水の相対速度である．  
ダルシー則を仮定すると間隙水の相対速度は次式で表される．

$$\boldsymbol{v}_w = -k \text{ grad } h \quad (\text{B.2})$$

ここで， $k$  は透水係数であり， $h$  は全水頭 ( $h = \frac{u}{\gamma_w} + \Omega$  であり， $u$  は間隙水圧， $\gamma_w$  は水の密度， $\Omega$  は位置水頭) である．位置水頭が無視でき，水の密度を 1 とすると，式 (B.2) は

$$\boldsymbol{v}_w = -k \text{ grad } u \quad (\text{B.3})$$

となる．式 (B.3) を式 (B.1) に代入すると次式が得られる．

$$\text{tr } \boldsymbol{D} = k \Delta u \quad (\text{B.4})$$

ここで， $\Delta$  は微分演算子でラプラシアンである  
均一変形状態を考えると間隙水圧は対象領域で均一であると考えられ， $\Delta u = 0$  となるので，

$$\text{tr } \boldsymbol{D} = 0 \quad (\text{B.5})$$

となる．

## Appendix C 式 (3.40) の誘導

式 (3.38) において、複素数根の一つ  $\rho = P + iQ$ , ( $P > 0$ ,  $Q > 0$ ) を代入すると次式が得られる.

$$[a\{(P^2 - Q^2)^2 - 4P^2Q^2\} - 2b(P^2 - Q^2) + c] + 4iPQ\{a(P^2 - Q^2) - b\} = 0 \quad (\text{C.1})$$

上式を満足するためには、実部と虚部が 0 である必要があり、それぞれ 0 とおくと、

$$a\{(P^2 - Q^2)^2 - 4P^2Q^2\} - 2b(P^2 - Q^2) + c = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$4PQ\{a(P^2 - Q^2) - b\} = 0 \quad (\text{C.3})$$

となり、 $P > 0$ ,  $Q > 0$  であるから、まず、式 (C.3) から次の条件を得る.

$$P^2 - Q^2 = \frac{b}{a} \quad (3.40)_1$$

つぎに、上式を式 (C.2) に代入することにより、

$$4P^2Q^2 = -\frac{b^2 - ac}{a^2} \quad (\text{C.4})$$

となり、式 (3.40)<sub>1</sub> と式 (C.4) を用いることにより、次の条件を得る.

$$P^2 + Q^2 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad (3.40)_2$$



#### Appendix D 式 (3.43) の誘導

式 (3.34) に式 (3.41) を代入すると,

$$\Re[-a\rho^3 k_m^3 A \cos(\rho k_m x_1) + (2b-a)\rho k_m^3 A \cos(\rho k_m x_1)] = 0$$

となり,  $k_m \neq 0$  を考慮に入れ, 上式を整理すると,

$$\Re[\{a\rho^2 - (2b-a)\}\rho A \cos(\rho k_m x_1)] = 0$$

となる. 上式の  $\{ \}$  の部分に  $\rho = P + iQ$  を代入して展開すると

$$\Re[\{a(P^2 - Q^2) + 2iaPQ - (2b-a)\}\rho A \cos(\rho k_m x_1)] = 0$$

となり, 式 (3.40-1) を用いて整理すると,

$$\Re[\{(a-b) + 2iaPQ\}(P+iQ)A \cos(\rho k_m x_1)] = 0$$

となる. 上式を展開して整理すると,

$$\Re[\{(a-b) - 2aQ^2\}P + i\{(a-b) + 2aP^2\}Q]A \cos(\rho k_m x_1) = 0$$

となり, 式 (3.40) を用いて整理すると,

$$\Re[\{(a - \sqrt{ac})P + i(a + \sqrt{ac})Q\}A\{\cos(Pk_m x_1)\cosh(Qk_m x_1) - i\sin(Pk_m x_1)\sinh(Qk_m x_1)\}] = 0$$

となる. ただし,  $\cos(\rho k_m x_1) = \cos(Pk_m x_1)\cosh(Qk_m x_1) - i\sin(Pk_m x_1)\sinh(Qk_m x_1)$  を用いた. 上式を展開して整理すると,

$$\begin{aligned} & \Re[\{(a - \sqrt{ac})P \cos(Pk_m x_1)\cosh(Qk_m x_1) + (a + \sqrt{ac})Q \sin(Pk_m x_1)\sinh(Qk_m x_1)\} \\ & - i\{(a - \sqrt{ac})P \sin(Pk_m x_1)\sinh(Qk_m x_1) - (a + \sqrt{ac})Q \cos(Pk_m x_1)\cosh(Qk_m x_1)\}](A_1 + iA_2)] = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで,  $A$  は複素数の未定乗数であるから  $A = A_1 + iA_2$  と置いた. 上式を展開して  $x_1 = \pm B$  を代入することにより, 最終的に次の条件を得る.

$$\begin{aligned} & \{(a - \sqrt{ac})P \cos(Pk_m B)\cosh(Qk_m B) + (a + \sqrt{ac})Q \sin(Pk_m B)\sinh(Qk_m B)\}A_1 \\ & + \{(a - \sqrt{ac})P \sin(Pk_m B)\sinh(Qk_m B) - (a + \sqrt{ac})Q \cos(Pk_m B)\cosh(Qk_m B)\}A_2 = 0 \end{aligned}$$

すなわち, 式 (3.34) は次のようになる.

$$A_{11}A_1 + A_{12}A_2 = 0 \quad (D.1)$$

$$A_{11} = \{(a - \sqrt{ac})P \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) + (a + \sqrt{ac})Q \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}$$

$$A_{12} = \{(a - \sqrt{ac})P \sin(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) - (a + \sqrt{ac})Q \cos(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}$$

式 (3.35) に式 (3.41) を代入すると,

$$\Re[-\rho^2 k_m^2 A \sin(\rho k_m x_1) + k_m^2 A \sin(\rho k_m x_1)] = 0$$

となり,  $k_m \neq 0$  を考慮に入れ, 上式を整理すると,

$$\Re[(\rho^2 - 1)A \sin(\rho k_m x_1)] = 0$$

となる. 上式に  $\rho = P + iQ$  を代入して展開すると,

$$\Re[(P^2 - Q^2 - 1 + 2iPQ)A \sin(\rho k_m x_1)] = 0$$

となり, 式 (3.40・1) を用いた後,  $a$  を掛ける事により,

$$\Re[(b - a) + 2iaPQ]A \{\sin(Pk_m x_1) \cosh(Qk_m x_1) + i \cos(Pk_m x_1) \sinh(Qk_m x_1)\} = 0$$

となる. ただし,  $\sin(\rho k_m x_1) = \sin(Pk_m x_1) \cosh(Qk_m x_1) + i \cos(Pk_m x_1) \sinh(Qk_m x_1)$  を用いた. 上式を展開して整理すると,

$$\begin{aligned} & \Re[\{(b - a) \sin(Pk_m x_1) \cosh(Qk_m x_1) - 2aPQ \cos(Pk_m x_1) \sinh(Qk_m x_1)\} \\ & + \{(b - a) \cos(Pk_m x_1) \sinh(Qk_m x_1) + 2aPQ \sin(Pk_m x_1) \cosh(Qk_m x_1)\}i](A_1 + iA_2) = 0 \end{aligned}$$

となる. また,  $A = A_1 + iA_2$  を代入した. 上式を展開して  $x_1 = \pm B$  を代入することにより, 最終的に次の条件を得る.

$$\begin{aligned} & \{(b - a) \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) - 2aPQ \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}A_1 \\ & - \{(b - a) \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) + 2aPQ \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}A_2 = 0 \end{aligned}$$

すなわち, 式 (3.35) は次のようになる.

$$A_{21}A_1 + A_{22}A_2 = 0 \quad (D.2)$$

$$A_{21} = \{(b - a) \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B) - 2aPQ \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B)\}$$

$$A_{22} = -\{(b - a) \cos(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) + 2aPQ \sin(Pk_m B) \cosh(Qk_m B)\}$$

式 (D.1) と式 (D.2) より,

$$Ax = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix}$$

と表すことができ、ゆえに  $A_1$ ,  $A_2$  の非自明な解が存在するための条件は、

$$\det(A) = 0$$

となる。上式を展開すると、

$$\begin{aligned} & -\{(a - \sqrt{ac})(b - a)P \cos^2(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B) \\ & + (a + \sqrt{ac})(b - a)Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \sinh^2(Qk_m B) \\ & + (a - \sqrt{ac})2aP^2 Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \cosh^2(Qk_m B) \\ & + (a + \sqrt{ac})2aQ^2 P \sin^2(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B)\} \\ & -\{(a - \sqrt{ac})(b - a)P \sin^2(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B) \\ & - (a + \sqrt{ac})(b - a)Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \cosh^2(Qk_m B) \\ & - (a - \sqrt{ac})2aP^2 Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \sinh^2(Qk_m B) \\ & + (a + \sqrt{ac})2aQ^2 P \cos^2(Pk_m B) \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B)\} = 0 \end{aligned}$$

となり、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ,  $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$  を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} & \{(a - \sqrt{ac})(b - a)P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B) - (a + \sqrt{ac})(b - a)Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \\ & + (a - \sqrt{ac})2aP^2 Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) + (a + \sqrt{ac})2aQ^2 P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B)\} = 0 \end{aligned}$$

となる。式 (3.40) を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} & \{(a - \sqrt{ac})(b - a)P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B) - (a + \sqrt{ac})(b - a)Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) \\ & + (a - \sqrt{ac})(\sqrt{ac} + b)Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) + (a + \sqrt{ac})(\sqrt{ac} - b)P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B)\} = 0 \end{aligned}$$

となる。上式を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} & \{-a(a - c) + 2\sqrt{ac}(a - b)\}P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B) \\ & - \{-a(a - c) - 2\sqrt{ac}(a - b)\}Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B) = 0 \end{aligned}$$

となり、最終的に次の分岐条件式が得られる。

$$\frac{Q \sin(Pk_m B) \cos(Pk_m B)}{P \sinh(Qk_m B) \cosh(Qk_m B)} = \frac{(a-c)\sqrt{a} - 2(a-b)\sqrt{c}}{(a-c)\sqrt{a} + 2(a-b)\sqrt{c}} \quad (3.43)$$

また，式 (D.1) あるいは式 (D.2) を用いることにより，

$$A_2 = -\frac{A_{11}}{A_{12}} A_1 = -\frac{A_{21}}{A_{22}} A_1 \quad (D.3)$$

と表せる．

Appendix E 式 (4.42) の誘導

$V_r$  の一般解が式 (4.41) で与えられるとき、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}(rV_r)_{,r}\right)_{,r} &= \Re\left[\left(\frac{1}{r}\{rCJ_1(\rho k_m r)\}\right)_{,r}\right] \\ &= \Re[-\rho^2 k_m^2 C J_1(\rho k_m r)] \end{aligned} \quad (E.1)$$

$$\begin{aligned} (rV_r)_{,r} &= \Re[\{rCJ_1(\rho k_m r)\}_{,r}] \\ &= \Re[\rho k_m r C J_0(\rho k_m r)] \end{aligned} \quad (E.2)$$

式 (4.34) に、式 (E.1) と式 (E.2) の関係を考慮し、式 (4.41) を代入すると、

$$\Re[(2b-a)k_m^2 \rho k_m r C J_0(\rho k_m r) + a[r\{-\rho^2 k_m^2 C J_1(\rho k_m r)\}]_{,r} + (a+c)k_m^2 C J_1(\rho k_m r)] = 0$$

となり、さらに式 (E.2) を用いることにより、次式のように簡略化できる。

$$\Re[(2b-a)k_m^2 C \rho k_m r J_0(\rho k_m r) - a\rho^3 k_m^3 r C J_0(\rho k_m r) + (a+c)k_m^2 C J_1(\rho k_m r)] = 0$$

$k_m \neq 0$  を考慮に入れ、上式を整理すると

$$\Re[\{a\rho^2 - (2b-a)\}\rho k_m r J_0(\rho k_m r) - (a+c)J_1(\rho k_m r)]C = 0$$

となり、上式において、 $\{ \}$  の部分に  $\rho = P + iQ$  を代入して展開すると、

$$\Re[\{a(P^2 - Q^2 + 2iPQ) - (2b-a)\}\rho k_m r J_0(\rho k_m r) - (a+c)J_1(\rho k_m r)]C = 0$$

となり、式 (4.40) <sub>1</sub> を用いて整理すると、

$$\Re[(a-b+2iaPQ)(P+iQ)k_m r J_0(\rho k_m r) - (a+c)J_1(\rho k_m r)]C = 0$$

となる。上式を展開して整理すると、

$$\Re[\{(a-b)P - 2aQ^2P\} + i\{(a-b)Q + 2aP^2Q\}]k_m r J_0(\rho k_m r) - (a+c)J_1(\rho k_m r)]C = 0$$

となり、式 (4.40) を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \Re[\{(a-\sqrt{ac})P + i(a+\sqrt{ac})Q\}\{\Re[J_0(\rho k_m r)] + i\Im[J_0(\rho k_m r)]\}k_m r \\ - (a+c)\{\Re[J_1(\rho k_m r)] + i\Im[J_1(\rho k_m r)]\}]C = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\Im[...]$  は $[...]$  の虚数部分を表す。上式を展開して整理すると、

$$\Re[\{(a - \sqrt{ac})P\Re[J_0(\rho k_m r)] - (a + \sqrt{ac})Q\Im[J_0(\rho k_m r)]\}k_m r - (a + c)\Re[J_1(\rho k_m r)]\} \\ + i\{(a - \sqrt{ac})P\Im[J_0(\rho k_m r)] + (a + \sqrt{ac})Q\Re[J_0(\rho k_m r)]\}k_m r - (a + c)\Im[J_1(\rho k_m r)]\}(c_1 + ic_2)] = 0$$

となる．ここで， $C$ は複素数の未定定数であるから  $C = c_1 + ic_2$  と置いた．上式を展開して整理し， $r = R$ を代入することにより，最終的に次の条件を得る．

$$A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$A_{11} = (a - \sqrt{ac})Pk_m R\Re[J_0(\rho k_m R)] - (a + \sqrt{ac})Qk_m R\Im[J_0(\rho k_m R)] - (a + c)\Re[J_1(\rho k_m R)]$$

$$A_{12} = -\{(a - \sqrt{ac})Pk_m R\Im[J_0(\rho k_m R)] + (a + \sqrt{ac})Qk_m R\Re[J_0(\rho k_m R)] - (a + c)\Im[J_1(\rho k_m R)]\}$$

式 (4.35) は，式 (E.2) を用いることにより，

$$\Re[-\rho^2 k_m^2 C J_1(\rho k_m r) + k_m^2 C J_1(\rho k_m r)] = 0$$

となり， $k_m \neq 0$ を考慮に入れ，上式を整理すると，

$$\Re[(\rho^2 - 1)C J_1(\rho k_m r)] = 0$$

となる．上式に  $\rho = P + iQ$ を代入して展開すると，

$$\Re[\{(P^2 - Q^2) - 1 + 2iPQ\}C J_1(\rho k_m r)] = 0$$

となり，式 (4.40) <sub>1</sub>を用いた後， $a$ を掛ける事により，

$$\Re[\{(b - a) - 2iaPQ\}\{\Re[J_1(\rho k_m r)] + i\Im[J_1(\rho k_m r)]\}C] = 0$$

となる．上式を展開して整理して，式 (C.4) を用いると，

$$\Re[\{(b - a)\Re[J_1(\rho k_m r)] - \sqrt{ac - b^2}\Im[J_1(\rho k_m r)]\} \\ + i\{(b - a)\Im[J_1(\rho k_m r)] + \sqrt{ac - b^2}\Re[J_1(\rho k_m r)]\}(c_1 + ic_2)] = 0$$

となる．また， $C = c_1 + ic_2$ を代入した．上式を展開して整理し， $r = R$ を代入することにより，最終的に次の条件を得る．

$$A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = 0 \quad (\text{E.4})$$

$$A_{21} = (b - a)\Re[J_1(\rho k_m R)] - \sqrt{ac - b^2}\Im[J_1(\rho k_m R)]$$

$$A_{22} = -\{(b - a)\Im[J_1(\rho k_m R)] + \sqrt{ac - b^2}\Re[J_1(\rho k_m R)]\}$$

式 (E.3) と式 (E.4) より,

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}$$

と表すことができ, ゆえに  $c_1, c_2$  の非自明な解が存在するための条件は,

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

となる. 上式を展開すると, 最終的に次の分岐条件式が得られる.

$$\frac{(b-a)\Re[J_1(\rho k_m R)] - \sqrt{ac-b^2}\Im[J_1(\rho k_m R)]}{(b-a)\Im[J_1(\rho k_m R)] + \sqrt{ac-b^2}\Re[J_1(\rho k_m R)]} = \frac{(a-\sqrt{ac})Pk_m R\Re[J_0(\rho k_m R)] - (a+\sqrt{ac})Qk_m R\Im[J_0(\rho k_m R)] - (a+c)\Re[J_1(\rho k_m R)]}{(a-\sqrt{ac})Pk_m R\Im[J_0(\rho k_m R)] + (a+\sqrt{ac})Qk_m R\Re[J_0(\rho k_m R)] - (a+c)\Im[J_1(\rho k_m R)]} \quad (4.42)$$

また, 式 (E.3) あるいは式 (E.4) を用いることにより,

$$c_2 = -\frac{A_{11}}{A_{12}}c_1 = -\frac{A_{21}}{A_{22}}c_1 \quad (\text{E})$$

と表せる.

Appendix F 式 (5.24) , 式 (5.25) の誘導

式 (5.16) の構成式を用いても良いが, ここでは構成式を次式のように変形する.

$$\begin{aligned}
 \dot{T}'_{rr} &= 2d_1 v_{r,r} + d_2 v_{z,z} \\
 \dot{T}'_{\theta\theta} &= 2d_1 \left( \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} v_{\theta,\theta} \right) + d_2 v_{z,z} \\
 \dot{T}'_{zz} &= 2d_1 v_{z,z} + d_3 v_{z,z} \\
 \dot{T}'_{r\theta} &= d_1 \left( \frac{1}{r} v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{1}{r} v_\theta \right) \\
 \dot{T}'_{rz} &= d_4 v_{r,z} + d_5 v_{z,r} \\
 \dot{T}'_{\theta z} &= d_4 v_{\theta,z} + d_5 \frac{1}{r} v_{z,\theta}
 \end{aligned} \tag{F.1}$$

ここで,  $d_i (i=1 \sim 5)$  は次式で与えられる.

$$d_1 = \tilde{G}, \quad d_2 = \frac{\tilde{G}}{\tilde{G} + \tilde{h}} (\tilde{G} - \tilde{K}\beta), \quad d_3 = \frac{\tilde{G}}{\tilde{G} + \tilde{h}} (-2\tilde{G} - \tilde{K}\beta), \quad d_4 = \tilde{G} - \frac{q}{2}, \quad d_5 = \tilde{G} + \frac{q}{2}$$

式 (5.1) の増分釣合式に式 (F.1) を代入すると,

$$\begin{aligned}
 &2d_1 v_{r,rr} + d_2 v_{z,rz} + d_1 \left( \frac{1}{r^2} v_{r,\theta\theta} + \frac{1}{r} v_{\theta,r\theta} - \frac{1}{r^2} v_{\theta,\theta} \right) + d_4 v_{r,zz} + d_5 v_{z,rz} \\
 &\quad + 2d_1 \left( \frac{1}{r} v_{r,r} - \frac{1}{r^2} v_r - \frac{1}{r^2} v_{\theta,\theta} \right) - \dot{u}_{,r} = 0 \\
 &d_1 \left( \frac{1}{r} v_{r,r\theta} - \frac{1}{r^2} v_{r,\theta} + v_{\theta,rr} - \frac{1}{r} v_{\theta,r} + \frac{1}{r^2} v_\theta \right) + 2d_1 \left( \frac{1}{r^2} v_{r,\theta} + \frac{1}{r^2} v_{\theta,\theta\theta} \right) + d_2 \frac{1}{r} v_{z,\theta z} \\
 &\quad + d_4 v_{\theta,zz} + d_5 \frac{1}{r} v_{z,\theta z} + 2d_1 \left( \frac{1}{r^2} v_{r,\theta} + \frac{1}{r} v_{\theta,r} - \frac{1}{r^2} v_\theta \right) - \frac{1}{r} \dot{u}_{,\theta} = 0 \\
 &d_4 v_{r,rz} + d_5 v_{z,rr} + d_4 \frac{1}{r} v_{\theta,\theta z} + d_5 \frac{1}{r^2} v_{z,\theta\theta} + (2d_1 + d_3) v_{z,zz} + d_4 \frac{1}{r} v_{r,z} + d_5 \frac{1}{r} v_{z,r} - \dot{u}_{,z} = 0
 \end{aligned}$$

となる. ここで,  $\text{tr} D = 0$  を考慮に入れ上式を変形する. その際, 第2式は  $r$  倍すると,

$$\begin{aligned}
 &d_1 \frac{1}{r^2} v_{r,\theta\theta} + d_4 v_{r,zz} - d_1 \frac{1}{r^2} (rv_{\theta,\theta})_{,r} + (d_2 - d_4) v_{z,rz} - \dot{u}_{,r} = 0 \\
 &-d_1 r \left( \frac{1}{r} v_{r,\theta} \right)_{,r} + d_1 r \left\{ \frac{1}{r} (rv_{\theta})_{,r} \right\}_{,r} + d_4 r v_{\theta,zz} + (d_2 - d_4) v_{z,\theta z} - \dot{u}_{,\theta} = 0 \\
 &d_5 \left\{ \frac{1}{r} (rv_{z,r})_{,r} \right\} + d_5 \frac{1}{r^2} v_{z,\theta\theta} + (2d_1 + d_3 - d_4) v_{z,zz} - \dot{u}_{,z} = 0
 \end{aligned}$$



となる．式 (5.22) の速度場の一般解を上式に代入し，式 (5.23) を用いて  $V_z$  を消去すると，

$$\begin{aligned} & \{-d_1 \frac{n^2}{r^2} V_r - d_4 k^2 V_r - d_1 (\frac{n}{r^2} V_\theta + \frac{n}{r} V'_\theta) \\ & - (d_2 - d_4) (V_r'' + \frac{1}{r} V_r' - \frac{1}{r^2} V_r + \frac{n}{r} V'_\theta - \frac{n}{r^2} V_\theta)\} \cos n\theta \sin kz - \dot{u}_{,r} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} & \{d_1 n (V_r' - \frac{1}{r} V_r) + d_1 (r V_\theta'' + V_\theta' - \frac{1}{r} V_\theta) - d_4 k^2 r V_\theta \\ & + (d_2 - d_4) n (V_r' + \frac{1}{r} V_r + \frac{n}{r} V_\theta)\} \sin n\theta \sin kz - \dot{u}_{,\theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

$$\begin{aligned} & [d_5 \frac{1}{k} \{V_r'''' + \frac{2}{r} V_r''' - \frac{1}{r^2} V_r'' + \frac{1}{r^3} V_r + n (\frac{1}{r} V_\theta'' - \frac{2}{r^2} V_\theta' + \frac{2}{r^3} V_\theta)\} - d_5 \frac{n^2}{kr^2} (V_r' + \frac{1}{r} V_r + \frac{n}{r} V_\theta) \\ & - (2d_1 + d_3 - d_4) k (V_r' + \frac{1}{r} V_r + \frac{n}{r} V_\theta)] \cos n\theta \cos kz - \dot{u}_{,z} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

となる．ここで， $( )'$  は  $r$  での微分を表す．式 (F.3) を  $r$  で偏微分した式から式 (F.2) を  $\theta$  で偏微分した式を減じると，

$$\begin{aligned} & d_1 \{(r V_\theta)''' - \frac{1}{r} (r V_\theta)'' + (1 - n^2) \frac{1}{r^2} (r V_\theta)' - \frac{d_4}{d_1} k^2 (r V_\theta)'\} \\ & + d_1 n \{V_r'' - \frac{1}{r} V_r' + (1 - n^2) \frac{1}{r^2} V_r - \frac{d_4}{d_1} k^2 V_r\} = 0 \end{aligned}$$

となる．ここで， $\psi = (r V_\theta)' + n V_r$  とおくと上式は，

$$d_1 \{\psi'' - \frac{1}{r} \psi' + \frac{1}{r^2} (1 - n^2) \psi - \frac{d_4}{d_1} k^2 \psi\} = 0 \quad (\text{F.4})$$

となる．式 (F.4) は式 (5.25) である．式 (F.4) より， $\psi$  の一般解は，

$$\psi = c_3 r J_n(\sqrt{-\frac{d_4}{d_1}} kr) = c_3 r I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}} kr) \quad (\text{F.5})$$

となる．ここで， $c_3$  は未定定数である．

ゆえに， $V_r$  は  $V_\theta$  を用いて次式で表される．

$$V_r = \frac{1}{n} \{-(r V_\theta)' + \psi\} = \frac{1}{n} \{-r V_\theta' - V_\theta + c_3 r I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}} kr)\} \quad (\text{F.6})$$

式 (F.3) を  $z$  で偏微分した式から式 (F.4) を  $\theta$  で偏微分した式を減じると,

$$\begin{aligned} & d_1 nk(V'_r - \frac{1}{r}V_r) + d_1 k(rV''_\theta + V'_\theta - \frac{1}{r}V_\theta) - d_4 k^3 r V_\theta + (d_2 - d_4) nk(V'_r + \frac{1}{r}V_r - \frac{n}{r}V_\theta) \\ & + d_5 \frac{n}{k} \{V'''_r + \frac{2}{r}V''_r - \frac{1}{r^2}V'_r + \frac{1}{r^3}V_r + n(\frac{1}{r}V''_\theta - \frac{2}{r^2}V'_\theta + \frac{2}{r^3}V_\theta)\} - d_5 \frac{n^3}{kr^2} (V'_r + \frac{1}{r}V_r - \frac{n}{r}V_\theta) \\ & - (2d_1 + d_3 - d_4) nk(V'_r + \frac{1}{r}V_r + \frac{n}{r}V_\theta) \end{aligned}$$

となる. 上式に式 (F.6) を代入し  $d_5$  で割ると,

$$\begin{aligned} & r^4 V''''_\theta + 6r^3 V'''_\theta + \{(5 - 2n^2)r^2 + \frac{1}{d_5}(-2d_1 + d_2 - d_3)k^2 r^4\} V''_\theta \\ & + \{(-1 - 2n^2)r + \frac{3}{d_5}(-2d_1 + d_2 - d_3)k^2 r^3\} V'_\theta \\ & + \{(1 - 2n^2 + n^4) + \frac{1}{d_5}(-2d_1 + d_2 - d_3)(1 - n^2)k^2 r^2 + \frac{d_4}{d_5}k^4 r^4\} V_\theta \\ & - [r^3 \psi''' + 2r^2 \psi'' + \{(-1 - n^2)r + \frac{1}{d_5}(-d_1 + d_2 - d_3)k^2 r^3\} \psi' + \{(1 - n^2) + \frac{1}{d_5}(-3d_1 + d_2 - d_3)k^2 r^2\} \psi] = 0 \end{aligned}$$

となり, 式 (F.4) を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} & [r^2 D^2 - rD + \{1 - n^2 + (-\alpha)k^2 r^2\}][r^2 D^2 + 3rD + \{1 - n^2 + (-\beta)k^2 r^2\}]V_\theta \\ & - \{\frac{1}{d_5}(-d_1 + d_2 - d_3) + \frac{d_4}{d_1}\}k^2 r^3 \psi' - \frac{1}{d_5}(-3d_1 + d_2 - d_3) + \frac{3d_4}{d_1}\}k^2 r^2 \psi = 0 \end{aligned} \quad (F.7)$$

となる. 式 (F.7) は式 (5.24) である. ここで  $D$  は  $r$  での微分であり,  $-\alpha$  と  $-\beta$  は次式で表される.

$$\begin{aligned} -\alpha, -\beta &= \frac{1}{2d_5} \{-(2d_1 - d_2 + d_3) \pm \sqrt{(2d_1 - d_2 + d_3)^2 - 4d_4 d_5}\} \\ &= \{\mu - 3\mu^* \pm \sqrt{(\mu - 3\mu^*)^2 - (2\mu + q)(2\mu - q)}\} / (2\mu + q) \\ &= \{b \pm \sqrt{b^2 - ac}\} / a \end{aligned}$$

ここで,  $a = 2d_5 = (2\mu + q)$ ,  $b = -(2d_1 - d_2 + d_3) = \mu - 3\mu^*$ , および  $c = 2d_4 = (2\mu - q)$  である. また, 式 (F.7) の同次微分方程式

$$[r^2 D^2 - rD + \{1 - n^2 + (-\alpha)k^2 r^2\}][r^2 D^2 + 3rD + \{1 - n^2 + (-\beta)k^2 r^2\}]V_\theta = 0 \quad (F.8)$$

を考えると、式 (F.8) の一般解は、

$$V_\theta = \frac{c_1}{r} J_n(\sqrt{-\alpha}kr) + \frac{c_2}{r} J_n(\sqrt{-\beta}kr) \quad (\text{F.9})$$

となる。ここで、 $c_1$ 、 $c_2$  は未定定数である。

また、式 (F.7) の特解は、

$$V_\theta = \frac{c_3}{k^2} \frac{d_1}{d_4} I'_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) = \frac{c_3}{k} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{d_1}{d_4}} \{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\} \quad (\text{F.10})$$

である (Appendix G) . よって式 (F.9) と式 (F.10) より、

$$V_\theta = \frac{c_1}{r} J_n(\sqrt{-\alpha}kr) + \frac{c_2}{r} J_n(\sqrt{-\beta}kr) + \frac{c_3}{k^2} \frac{d_1}{d_4} I'_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \quad (\text{F.11})$$

となる。また、式 (F.11) を式 (F.6) に代入すると、

$$V_r = -\frac{c_1}{n} J'_n(\sqrt{-\alpha}kr) - \frac{c_2}{n} J'_n(\sqrt{-\beta}kr) - \frac{1}{r} \frac{c_3 n}{k^2} \frac{d_1}{d_4} I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \quad (\text{F.12})$$

となり、式 (5.23) に式 (F.11) と式 (F.12) を代入すると、

$$V_z = \frac{k}{n} \{c_1(-\alpha) J_n(\sqrt{-\alpha}kr) + c_2(-\beta) J_n(\sqrt{-\beta}kr)\} \quad (\text{F.13})$$

となる。

## Appendix G 特解の誘導

式 (F.7) の非同次の部分は式 (F.5) を代入すると,

$$\begin{aligned}
 & -\left\{\frac{1}{d_5}(-d_1+d_2-d_3)+\frac{d_4}{d_1}\right\}k^2r^3\psi'-\frac{1}{d_5}(-3d_1+d_2-d_3)+\frac{3d_4}{d_1}\left\}k^2r^2\psi\right. \\
 & =-\left\{\frac{1}{d_5}(-4d_1+2d_2-2d_3)+\frac{4d_4}{d_1}\right\}k^2r^3c_3I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \\
 & \quad -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{d_5}(-d_1+d_2-d_3)+\frac{d_4}{d_1}\right\}\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3r^4c_3\left\{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)+I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\right\}
 \end{aligned} \tag{G.1}$$

となる. 一方,  $y_1=I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)$  とすると  $r^2y_1''+ry_1'+\{-(n-1)^2-\frac{d_4}{d_1}k^2r^2\}y_1=0$  であるから  $y_1$  を (F.7) の同次の部分に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & \{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\}[2ry_1'+\{2(n-1)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2\}y_1] \\
 & =\{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\} \\
 & \quad [2\{\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}krI_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)+(n-1)I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}+\{-2(n-1)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2\}I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)] \\
 & =\{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\}\{2\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}krI_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}
 \end{aligned}$$

となる. また,  $y_2=I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)$  とすると  $r^2y_2''+ry_2'+\{-(n+1)^2-\frac{d_4}{d_1}k^2r^2\}y_2=0$  であるから  $y_2$  を (F.7) の同次の部分に代入すると,

$$\begin{aligned}
 & \{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\}[2ry_2'+\{2(n+1)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2\}y_2] \\
 & =\{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\} \\
 & \quad [2\{\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}krI_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)-(n+1)I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}+\{2(n+1)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2\}I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)] \\
 & =\{r^2D^2-rD+(1-n^2-\alpha k^2r^2)\}\{2\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}krI_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)+(\frac{d_4}{d_1}-\beta)k^2r^2I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}
 \end{aligned}$$

よって,  $y=y_1+y_2$  を (F.7) の同次の部分に代入すると,

$$\begin{aligned}
& \{r^2 D^2 - rD + (1 - n^2 - \alpha k^2 r^2)\} [2ry' + \{2(n+1) + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 r^2\}y] \\
& = \{r^2 D^2 - rD + (1 - n^2 - \alpha k^2 r^2)\} [4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 r^2 \{I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + I_{n+1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr)\}] \\
& \hspace{25em} (G.2)
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$y_3 = r I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) \text{ とすると } r^2 y_3'' - r y_3' + \{1 - n^2 - \frac{d_4}{d_1} k^2 r^2\} y_3 = 0,$$

$$y_4 = r^2 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) \text{ とすると } r^2 y_4'' - 3r y_4' + \{4 - (n-1)^2 - \frac{d_4}{d_1} k^2 r^2\} y_4 = 0,$$

$$y_5 = r^2 I_{n+1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) \text{ とすると } r^2 y_5'' - 3r y_5' + \{4 - (n+1)^2 - \frac{d_4}{d_1} k^2 r^2\} y_5 = 0 \text{ であるから式 (G.2) は,}$$

$$\begin{aligned}
& \{r^2 D^2 - rD + (1 - n^2 - \alpha k^2 r^2)\} [4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 r^2 \{I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + I_{n+1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr)\}] \\
& = \{r^2 D^2 - rD + (1 - n^2 - \alpha k^2 r^2)\} [4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k y_3 + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 \{y_4 + y_5\}] \\
& = 4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3 r^2 (\frac{d_4}{d_1} - \alpha) y_3 \\
& + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 \{2r y_4' - 2(n+1)y_4 + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^2 y_4\} + (\frac{d_4}{d_1} - \beta)k^2 \{2r y_5' + 2(n-1)y_5 + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^2 y_5\} \\
& \hspace{25em} (G.3)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
& 2r y_4' - 2(n+1)y_4 + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^2 y_4 \\
& = 2r \{r^2 I_{n-1}'(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + 2r I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr)\} - 2(n+1)r^2 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^4 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) \\
& = 2r^2 \{\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (n-1)I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr)\} - 2(n-1)r^2 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^4 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) \\
& = 2\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr^3 I_n(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr) + (\frac{d_4}{d_1} - \alpha)k^2 r^4 I_{n-1}(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr)
\end{aligned}$$

であり, また,

$$\begin{aligned}
& 2ry'_5 + 2(n-1)y_5 + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^2y_5 \\
&= 2r\{r^2 I'_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + 2r I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\} + 2(n-1)r^2 I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^4 I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \\
&= 2r^2\left\{\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) - (n+1)I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\right\} + 2(n+1)r^2 I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^4 I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr^3 I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^4 I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)
\end{aligned}$$

であるから、式 (G.3) は、

$$\begin{aligned}
& 4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3r^2\left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)y_3 \\
&+ \left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^2\{2ry'_4 - 2(n+1)y_4 + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^2y_4\} \\
&+ \left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^2\{2ry'_5 + 2(n-1)y_5 + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)k^2r^2y_5\} \\
&= 4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3r^3\left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \\
&+ \left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^2\left[4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr^3 I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)\left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^4r^4\{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}\right] \\
&= 4\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3r^3\left(2\frac{d_4}{d_1} - \alpha - \beta\right)I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)\left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^4r^4\{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}
\end{aligned}$$

となる。ゆえに式 (F.7) の同次の部分に式 (F.10) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& 2k^2r^3\left(2\frac{d_4}{d_1} - \alpha - \beta\right)I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{d_1}{d_4}}\left(\frac{d_4}{d_1} - \alpha\right)\left(\frac{d_4}{d_1} - \beta\right)k^3r^4\{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\} \\
&= \left\{\frac{1}{d_5}(-4d_1 + 2d_2 - 2d_3) + \frac{4d_4}{d_1}\right\}k^2r^3c_3I_n\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{d_5}(-d_1 + d_2 - d_3) + \frac{d_4}{d_1}\right\}\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}k^3r^4c_3\{I_{n-1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right) + I_{n+1}\left(\sqrt{\frac{d_4}{d_1}}kr\right)\}
\end{aligned}$$

となり、式 (G.1) と打ち消しあう。よって式 (F.10) が  $V_\theta$  の特解であることがわかる。

## Appendix H 式 (5.37) の誘導

式 (5.1)<sub>3</sub> を変形すると次式を得る.

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = -\dot{T}'_{zr,r} - \frac{1}{r}\dot{T}'_{z\theta,\theta} - \frac{1}{r}\dot{T}'_{rz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta})_{,z}$$

上式の右辺に式 (F.1) を代入し,  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$  を考慮して整理すると,

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = d_4 v_{z,zz} - d_5 (v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r} + \frac{1}{r^2}v_{z,\theta\theta}) + d_1 (v_{r,rz} - \frac{1}{r}v_{r,z} - \frac{1}{r}v_{\theta,\theta z})$$

となり,  $d_4 = 2d_1 - d_5$ であることを考慮して上式を整理すると,

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = -d_5 (v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r} + \frac{1}{r^2}v_{z,\theta\theta} + v_{z,zz}) + d_1 (v_{r,rz} - \frac{1}{r}v_{r,z} - \frac{1}{r}v_{\theta,\theta z} + 2v_{z,zz})$$

となる. 上式において,  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$  を考慮すると,

$$\{\dot{T}'_{zz} + \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} - \dot{T}'_{\theta\theta}) - \dot{u}\}_{,z} = -d_5 (v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r} + \frac{1}{r^2}v_{z,\theta\theta} + v_{z,zz}) + d_1 \{-\frac{2}{r}v_r - \frac{2}{r}v_{\theta,\theta} + v_{z,z}\}_{,z} \quad (\text{H.1})$$

となる. 一方, 式 (5.19)<sub>1</sub> の構成式において,  $\text{tr } \mathbf{D} = 0$  を考慮すると, 次式が得られる.

$$\{\dot{T}'_{zz} - \frac{1}{2}(\dot{T}'_{rr} + \dot{T}'_{\theta\theta})\}_{,z} = 3\mu^* v_{z,zz} \quad (\text{H.2})$$

式 (H.1) から式 (H.2) を減じることにより, 次式が得られる.

$$(\dot{T}'_{rr} - \dot{u})_{,z} = -d_5 (v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r} + \frac{1}{r^2}v_{z,\theta\theta} + v_{z,zz}) + d_1 \{-\frac{2}{r}v_r - \frac{2}{r}v_{\theta,\theta} + v_{z,z}\}_{,z} - 3\mu^* v_{z,zz}$$

ゆえに, 式 (5.13)<sub>1</sub> の境界条件は速度場を用いて次式のように得られる.

$$-d_5(v_{z,rr} + \frac{1}{r}v_{z,r} + \frac{1}{r^2}v_{z,\theta\theta} + v_{z,zz}) + d_1\{-\frac{2}{r}v_r - \frac{2}{r}v_{\theta,\theta} + v_{z,z}\}_{,z} - 3\mu^*v_{z,zz} = 0$$

上式に式 (5.22) を代入して、整理すると、

$$d_5(V_z'' + \frac{1}{r}V_z' - \frac{n^2}{r^2}V_z - k_m^2V_z) + d_1k_m\{\frac{2}{r}V_r + \frac{2n}{r}V_\theta + k_mV_z\} - 3\mu^*k_m^2V_z = 0$$

となり、式 (5.36) を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [d_1\{-2rJ_n'(\rho_1k_mr) + (2n^2 + \rho_1^2k_m^2r^2)J_n(\rho_1k_mr)\} - \{d_5(\rho_1^2 + 1) + 3\mu^*\}\rho_1^2k_m^2r^2J_n(\rho_1k_mr)]c_1 \\ & + \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [d_1\{-2rJ_n'(\bar{\rho}_1k_mr) + (2n^2 + \bar{\rho}_1^2k_m^2r^2)J_n(\bar{\rho}_1k_mr)\} - \{d_5(\bar{\rho}_1^2 + 1) + 3\mu^*\}\bar{\rho}_1^2k_m^2r^2J_n(\bar{\rho}_1k_mr)]\bar{c}_1 \\ & + d_1 \frac{k_m}{n} \frac{2n^2}{k_m^2r^2} [rI_n'(\rho_3k_mr) - I_n(\rho_3k_mr)]c_3 = 0 \end{aligned}$$

$rJ_n'(ar) = nJ_n(ar) - arJ_{n+1}(ar)$ ,  $rI_n'(ar) = nI_n(ar) + arI_{n+1}(ar)$  を考慮して、上式を整理すると、

$$\begin{aligned} & \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [2d_1\{\rho_1k_mrJ_{n+1}(\rho_1k_mr) + (n^2 - n)J_n(\rho_1k_mr)\} - \{d_5(\rho_1^2 + 1) + 3\mu^* - d_1\}\rho_1^2k_m^2r^2J_n(\rho_1k_mr)]c_1 \\ & + \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [2d_1\{\bar{\rho}_1k_mrJ_{n+1}(\bar{\rho}_1k_mr) + (n^2 - n)J_n(\bar{\rho}_1k_mr)\} - \{d_5(\bar{\rho}_1^2 + 1) + 3\mu^* - d_1\}\bar{\rho}_1^2k_m^2r^2J_n(\bar{\rho}_1k_mr)]\bar{c}_1 \\ & + d_1 \frac{k_m}{n} \frac{2n^2}{k_m^2r^2} [\rho_3k_mrI_{n+1}(\rho_3k_mr) + (n-1)I_n(\rho_3k_mr)]c_3 = 0 \end{aligned}$$

となり、 $d_1 = \mu$ ,  $b = \mu - 3\mu^*$ ,  $a = 2d_5$  を代入して整理すると、次式のように式 (5.37) <sub>1</sub> を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [4\mu\rho_1k_mrJ_{n+1}(\rho_1k_mr) + \{4\mu(n^2 - n) - \{a(\rho_1^2 + 1) - 2b\}\rho_1^2k_m^2r^2\}J_n(\rho_1k_mr)]c_1 \\ & + \frac{k_m}{n} \frac{1}{r^2} [4\mu\bar{\rho}_1k_mrJ_{n+1}(\bar{\rho}_1k_mr) + \{4\mu(n^2 - n) - \{a(\bar{\rho}_1^2 + 1) - 2b\}\bar{\rho}_1^2k_m^2r^2\}J_n(\bar{\rho}_1k_mr)]\bar{c}_1 \\ & + 4\mu \frac{k_m}{n} \frac{n^2}{k_m^2r^2} [\rho_3k_mrI_{n+1}(\rho_3k_mr) + (n-1)I_n(\rho_3k_mr)]c_3 = 0 \end{aligned} \tag{5.37} <sub>1</sub>$$



式 (5.13) <sub>2</sub> の境界条件は式 (F.1) を代入して整理すると,

$$d_1 \left( \frac{1}{r} v_{r,\theta} + v_{\theta,r} - \frac{1}{r} v_\theta \right) = 0$$

となり, 式 (5.22) を代入すると,  $d_1 \neq 0$  であるから次式となる.

$$-\frac{n}{r} V_r + V'_\theta - \frac{1}{r} V_\theta = 0$$

上式に式 (5.36) を代入して, 整理すると,

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2}{r} J'_n(\rho_1 k_m r) - \frac{2}{r^2} J_n(\rho_1 k_m r) \right\} c_1 + \left\{ \frac{2}{r} J'_n(\bar{\rho}_1 k_m r) - \frac{2}{r^2} J_n(\bar{\rho}_1 k_m r) \right\} \bar{c}_1 \\ & + \frac{1}{k_m^2} \left\{ I''_n(\rho_3 k_m r) - \frac{1}{r} I'_n(\rho_3 k_m r) + \frac{n^2}{r^2} I_n(\rho_3 k_m r) \right\} c_3 = 0 \end{aligned}$$

となり,  $I''_n(ar) + \frac{1}{r} I'_n(ar) - \left( \frac{n^2}{r^2} + a^2 \right) I_n(ar) = 0$  を考慮して整理すると, 上式は次式となる.

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2}{r} J'_n(\rho_1 k_m r) - \frac{2}{r^2} J_n(\rho_1 k_m r) \right\} c_1 + \left\{ \frac{2}{r} J'_n(\bar{\rho}_1 k_m r) - \frac{2}{r^2} J_n(\bar{\rho}_1 k_m r) \right\} \bar{c}_1 \\ & + \frac{1}{k_m^2} \left\{ -\frac{2}{r} I'_n(\rho_3 k_m r) + \left( \frac{2n^2}{r^2} + \rho_3^2 k_m^2 \right) I_n(\rho_3 k_m r) \right\} c_3 = 0 \end{aligned}$$

$r J'_n(ar) = n J_n(ar) - ar J_{n+1}(ar)$ ,  $r I'_n(ar) = n I_n(ar) + ar I_{n+1}(ar)$  を考慮して上式を整理すると,

次式のように式 (5.37) <sub>2</sub> を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{r^2} \{ (n-1) J_n(\rho_1 k_m r) - \rho_1 k_m r J_{n+1}(\rho_1 k_m r) \} c_1 + \frac{2}{r^2} \{ (n-1) J_n(\bar{\rho}_1 k_m r) - \bar{\rho}_1 k_m r J_{n+1}(\bar{\rho}_1 k_m r) \} \bar{c}_1 \\ & + \frac{1}{k_m^2 r^2} \{ -2 \rho_3 k_m r I_n(\rho_3 k_m r) + \{ 2(n^2 - n) + \rho_3^2 k_m^2 r^2 \} I_n(\rho_3 k_m r) \} c_3 = 0 \end{aligned} \quad (5.37) \quad 2$$

式 (5.13) <sub>3</sub> の境界条件は式 (F.1) を代入して整理すると,

$$d_5(v_{r,z} + v_{z,r}) = 0$$

となり, 式 (5.22) を代入すると,  $d_5 \neq 0$  であるから次式となる.

$$k_m V_r + V'_z = 0$$

上式に式 (5.36) を代入して, 整理すると,

$$\frac{k_m}{n}(1-\rho_1^2)J'_n(\rho_1 k_m r)c_1 + \frac{k_m}{n}(1-\bar{\rho}_1^2)J'_n(\bar{\rho}_1 k_m r)c_2 + \frac{k_m}{n} \frac{1}{r} \frac{n^2}{k_m^2} I_n(\rho_1 k_m r)c_3 = 0$$

となり,  $r J'_n(ar) = n J_n(ar) - ar J_{n+1}(ar)$  を考慮して整理すると, 次式のように式 (5.37) <sub>3</sub> を得る.

$$\begin{aligned} & \frac{k_m}{n}(1-\rho_1^2)\{n J_n(\rho_1 k_m r) - \rho_1 k_m r J_{n+1}(\rho_1 k_m r)\}c_1 \\ & + \frac{k_m}{n}(1-\bar{\rho}_1^2)\{n J_n(\bar{\rho}_1 k_m r) - \bar{\rho}_1 k_m r J_{n+1}(\bar{\rho}_1 k_m r)\}c_2 \\ & + \frac{k_m}{n} \frac{1}{r} \frac{n^2}{k_m^2} I_n(\rho_1 k_m r)c_3 = 0 \end{aligned} \tag{5.37} <sub>3</sub>$$

## 第 2 編

要素内部に変位の不連続性をもった  
強不連続有限要素解析に関する研究

## 1. 序論

### 1.1 本論文の目的

岩石やコンクリートのき裂，地盤のせん断帯，金属のリューダスバンドなど，ひずみ場の局所化から不連続変位場の発生・進展により，やがて耐荷力を失い破壊へと至る一連の現象を考察することは，工学上極めて重要であり，現在も精力的な研究が行われている．

上記研究の一例としてコンクリートなどの脆性材料を扱う有限要素解析においては，Hillerborg により提案された変位不連続面上の節点間に引張軟化挙動を示すリンク要素を用いた仮想ひび割れモデルや要素剛性に直接軟化挙動を組み込むひび割れ帯モデルなどが頻繁に用いられている．前者は物理的意味が明快であるが予めき裂の位置を決定しておくか，ひび割れ進展挙動を追跡するためには，進展に伴う要素の再分割が必要となる．後者はひび割れ幅の評価が困難であること，また本来要素分割に依存しない物体全体の挙動を示す荷重－載荷点変位が要素分割に依存するなどの欠点がある．また，弾塑性体理論に基づいてひずみの局所化やせん断帯の発生を通常の有限要素法に用いて解析した場合も，その結果が要素分割に依存することも良く知られており，そのため種々の解析手法の研究報告も数多い．

このような短所を克服できる解析手法の一つとして，Simo や Oliver らによって提案された不連続変位を要素内部に組み込んだ有限要素法による強不連続解析が挙げられる．ここで強不連続とは変位場に不連続が生じるものを意味し，またひずみ場に不連続が生じるものは弱不連続と呼ばれる．強不連続解析では，Heaviside の単位関数を用いて表された不連続変位場を定義し，これを空間微分することにより Dirac のデルタ関数で表される非有界項を含むひずみ場を誘導する．そして使用する構成式に応力の有界性の条件を考慮すると変位不連続面内とそれ以外の部分の構成式を得る．これらを離散化して有限要素定式化を行い，その際不連続変位場を要素内部に組み込む非適合要素を用いる．またひずみ場を数値解析で直接扱うため，Dirac のデルタ関数を微小な不連続面の幅の逆数により近似する．このような解析手法により，荷重－載荷点変位が要素分割に依存しない客観的な解析が行うことが出来る．

またこれらの変位不連続面を要素内部に組み込む解析手法は，破壊力学の分野で従来行われている要素辺上で不連続面を表す有限要素解析に比べ，き裂進展方向は自由に決める事が出来，き裂進展先で再び細かい要素分割を行う必要が無いことなど，せん断帯やき裂進展解析に極めて有用であり，今後の研究が大いに期待される手法である．

しかしながら，興味ある解析手法であるが，現在まで 1 次元の場合を除き，理論解が得られない事もあり，それらの解析手法の精度検討に関する研究は筆者の知る限り皆無である．興味ある解析手法であっても，精度が悪ければ，工学的に無意味である．

そこで，本論文の目的として，不連続面の解析モデルとして，とりあえず先に述べた，

Simo や Oliver らの強不連続モデルの内、等方損傷モデルを用いたモデルを採用し、まずその理論及び解析手法の概要を述べる。次に具体的な数値解析例により、その強不連続解析を行った結果、荷重 - 载荷点変位の要素分割不依存性及び仮想的に採用した不連続面の幅の不依存性の確認を行う。その後破壊力学の重要なパラメータの一つである破壊エネルギー、即ちエネルギー解放率を精度良く定量的に表しているかを検討する事によって、強不連続解析手法の妥当性の検討を行う。なお、このエネルギー解放率を求めるために、周知の  $J$  積分と、本論文で不連続面上に結合応力領域を含む場合に適用できる事を新たに証明した経路独立な  $E$  積分を使用する。

## 1.2 本論文の内容

本論文は序論から結論まで 8 章で構成されている。

第 1 章では、本論文の目的と本論文の内容を述べる。第 2 章では、本論文で使用する定式化に必要な固体力学の基礎を解説する。第 3 章では、初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法を解説する。これは、第 7 章の数値解析において、数値解析により非線形方程式を解くために必要となる。第 4 章では、強不連続解析の基礎理論を解説し、またその分類化を述べ、分類化された中から SKON 定式化が優れていることを述べる。第 5 章では、SKON 定式化に含まれる手法に関して、強不連続解析の具体的な定式化を行い、有限要素法への適用を解説する。第 6 章では、エネルギー解放率を求めるための経路独立積分である  $J$  積分と  $E$  積分について解説する。これらは強不連続解析の精度検証に使用する。第 7 章では、強不連続解析を考慮した有限要素解析を行い、その特徴を検討し、そして本論文の主目的であるエネルギー解放率に着目した強不連続解析の精度検証を行う。そして、第 8 章において結論を述べる。

## 2 固体力学の基礎 1)~6)

### 2.1 表記法

#### 2.1.1 直接表記法と指標表記法

本論文では、主として直接表記法 (direct notation) を用い、必要に応じて直交デカルト座標系 (Cartesian coordinate) ( $o ; x_1 x_2 x_3$ ) に準拠した指標 (添字) 表記法 (indicial notation) を用いる。

直接表記では、例えば、ベクトルを  $\boldsymbol{v}$  と記す。それは、基底ベクトル  $\boldsymbol{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $|\boldsymbol{e}_i| = 1$  の直交デカルト座標系は、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \boldsymbol{e}_i \quad (2.1.1)$$

と表される。ここに、 $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は、 $\boldsymbol{v}$  の成分、すなわち、 $v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i$  (ドット “ $\cdot$ ” は内積を表す) である。指標表記では、ベクトルを  $(v_1, v_2, v_3)$ , あるいは簡単に  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) と記す。

テンソルに関しても、このような表記法を用いる。例えば、ベクトル  $\boldsymbol{a}$  からベクトル  $\boldsymbol{b}$  への線形変換として定義される 2 階のテンソル (2nd order tensor)  $\boldsymbol{T}$  は、 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$  と表現され、

$$\boldsymbol{T} = \sum_i \sum_j T_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \quad (2.1.2)$$

と記すことができる。ここに、 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$  をテンソル積 (tensor product) という。テンソル  $\boldsymbol{T}$  の指標表記は、 $T_{ij}$  ( $\equiv \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_j$ ) ( $i, j = 1, 2, 3$ ) である。高階のテンソルの表記法も同様である。

#### 2.1.2 総和規約

記述を簡潔にするために、式または項に 2 回繰り返して現れる添字については、総和規約 (summation convention rule) を適用する。例えば、

$$\sum_{i=1}^3 A_{ij} b_j = A_{ij} b_j \quad (2.1.3)$$

$$\sum_{i=1}^3 (b_i)^2 = b_i b_i \quad (2.1.4)$$

などのように，記号  $\Sigma$  を省略して記す．

### 2.1.3 その他

微分に関しては，次の記号などを用いる．

$$\text{grad}(\ ) = \nabla(\ ) = \partial_i(\ ) \mathbf{e}_i = \partial(\ ) / \partial x_i \mathbf{e}_i = (\ )_{,i} \mathbf{e}_i \quad (2.1.5)$$

$$\text{div}(\ ) = \nabla \cdot (\ ) \quad (2.1.6)$$

また，次のように定義された順列記号 (permutation symbol)  $e_{ijk}$  およびクロネッカー

(Kronecker) のデルタ  $\delta_{ij}$  を用いる．

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1, & i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の偶順列} \\ -1, & i, j, k \text{ が } 1, 2, 3 \text{ の奇順列} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \quad (2.1.7)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1.8)$$

なお， $e_{ijk} e_{ilm} = \delta_{ij} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$  である．

## 2.2 運動と変形

### 2.2.1 配置と変位

連続体力学では物体  $B$  は物質を理想化した粒子（物質点と呼ぶ） $\mathbf{X}$  の連続的集合としてとらえ、物体  $B$  がある時刻に空間で占める領域を配置（configuration）という。

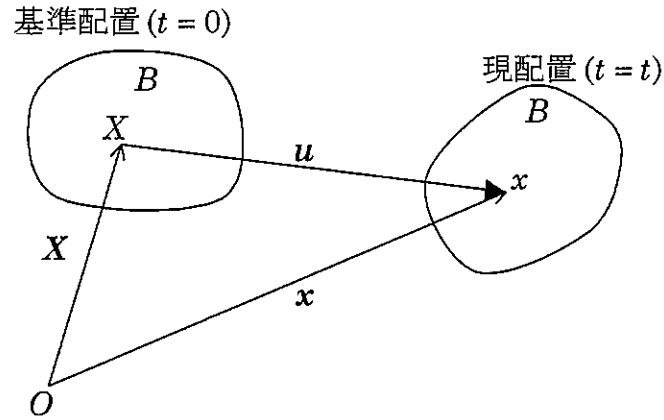


図 2.1 現配置と基準配置と変位

物体  $B$  が力学的作用を受けると配置が変形する。この変形を記述するため、ある特定の時刻の配置  $\kappa$ （普通、物体が初期時刻  $t = 0$  で占める領域と考えてよい）を採用して基準配置（reference configuration）とし、そのときの物質点  $\mathbf{X}$  の位置ベクトルを  $\mathbf{X}$  と表す。現時刻  $t = t$  でその物質点  $\mathbf{X}$  が位置ベクトル  $\mathbf{x}$  に移動したとき、関数

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.2.1)$$

は物体  $B$  の運動（motion）を表わし、そのとき  $B$  の占める現配置（current configuration）という（図 2.1 参照）。以下では式(2.2.1)の  $\hat{\mathbf{x}}$  は各時刻で 1 対 1（one to one）かつ連続微分可能な関数とする。このことは式(2.2.1)の逆関数

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2.2)$$

が存在することと一意に対応している。

また、現配置と基準配置の間での物質点の移動を表わす変位は、



$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2.3)$$

と表わされる.

### 2.2.2 変形勾配と変位勾配

式(2.2.1)において,  $\mathbf{x}$  の  $\mathbf{X}$  に関する全微分をとると

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (2.2.4)$$

となる. ここで

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2.5)$$

の変形勾配 (deformation gradient) と呼ばれ, 物質点  $X$  の近傍の基準配置と現配置での相対的な変形を表わしている (図 2.2 参照).

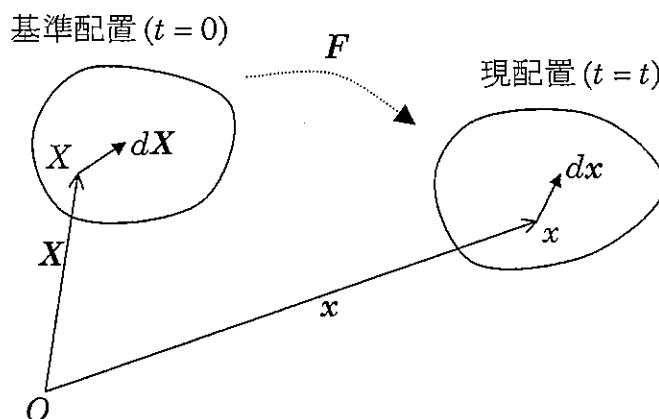


図 2.2 変形勾配

そして, 変形勾配の行列式の絶対値

$$J = |\det \mathbf{F}| \quad (2.2.6)$$

は基準配置と現配置での物質点  $X$  近傍の局所的体積比を与えることから, 有限体積部分の

体積が変形後ゼロにならないとすると,  $\det \mathbf{F} \neq 0$  であることが要求される. また変形の途中で物体の一部が, 外と内と入れ替えるようなことはない (impenetrable) とすれば,  $\mathbf{F}$  は  $\det \mathbf{F} > 0$  なる非特異な (non-singular) テンソルとなる. また, このことは(2.2.4)の逆関係

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} \quad (2.2.7)$$

が存在することと一意に対応している.

また, 式(2.2.3)の変位を用いて, 基準配置および現配置に基づく変位勾配 (displacement gradient) を求めると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\right)^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1} \quad (2.2.9)$$

となる.

### 2.2.3 ひずみ

「ひずみ」とは, 物質点の「運動」の中から「剛体回転」を取り除いたものであるので, ある点とその近傍にある別の点との距離が, 変形中どのように変化するかを調べれば, まさにその点近傍のひずみの状態を評価することになる. そのため, 図 2.2 の基準配置内のベクトル  $d\mathbf{X}$  と現配置の内のベクトル  $d\mathbf{x}$  との長さの 2 乗差を式(2.2.4)を用いて求めると

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= \mathbf{F}d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{G}d\mathbf{X} \quad \because \mathbf{G} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ &= d\mathbf{X} \cdot 2\mathbf{G}d\mathbf{X} \\ &= 2\mathbf{G} \cdot (d\mathbf{X} \otimes d\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

となる. ここで  $\mathbf{G}$  はグリーンひずみテンソル (Green strain tensor) またはラグランジュのひずみテンソル (Lagrange strain tensor) と呼ばれる. また, 同様に式(2.2.7)を用

いて求めると

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - F^{-1}d\mathbf{x} \cdot F^{-1}d\mathbf{x} \\
&= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - F^{-1}d\mathbf{x} \cdot F^{-1}d\mathbf{x} \\
&= d\mathbf{x} \cdot \{1 - (F^{-1})^T F^{-1}\} d\mathbf{x} \\
&= d\mathbf{x} \cdot \{1 - (F^T)^{-1} F^{-1}\} d\mathbf{x} \\
&= d\mathbf{x} \cdot \{1 - (FF^T)^{-1}\} d\mathbf{x} \\
&= d\mathbf{X} \cdot 2A d\mathbf{X} \quad \because A = \frac{1}{2} \{1 - (FF^T)^{-1}\} \\
&= 2A \cdot (d\mathbf{x} \otimes d\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

となる。ここで  $\mathbf{A}$  はアルマンシのひずみテンソル (Almansi strain tensor) またはオイラーのひずみテンソル (Euler strain tensor) と呼ばれる。

次に、 $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{A}$  を基準配置および現配置に基づく変位勾配式(2.2.8)および式(2.2.9)によって表わすと、それぞれ、

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} &= \frac{1}{2} (F^T F - \mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \right) - \mathbf{1} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{2} \{1 - (FF^T)^{-1}\} \\
&= \frac{1}{2} \{1 - (F^T)^{-1} F^{-1}\} \\
&= \frac{1}{2} \{1 - (F^{-1})^T F^{-1}\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left( 1 - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left[ 1 - \left\{ -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{1} \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T - \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right\}
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

となる。このように  $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{A}$  はそれぞれ基準配置と現配置に基づくものであることがわかる。

ここで、 $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{A}$  の成分は、それぞれ基準配置および現配置に基づく変位勾配に関する線形項とその積の項である 2 次項から成り立っている。変位勾配が十分小さいとき、すなわち変位勾配の 2 次項が無視できるとき、このような変形を微小変形 (infinitesimal

deformation) と呼び、 $\mathbf{G}$  と  $\mathbf{A}$  は以下のように近似され、

$$\mathbf{G} \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right\} \equiv \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.14)$$

$$\mathbf{A} \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \equiv \mathbf{e} \quad (2.2.15)$$

ここで  $\boldsymbol{\varepsilon}$  と  $\mathbf{e}$  をそれぞれ微小ひずみテンソル (infinitesimal strain) と呼ぶ。そして、変位勾配の 2 次項が無視できることから、次式で示すように基準配置および現配置に基づく変位勾配は等しいとみなすことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) \right\} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \left( 1 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \approx \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.2.16)$$

すなわち微小変形論においては基準配置と現配置の区別する必要があることがわかる。したがって、 $\boldsymbol{\varepsilon}$  と  $\mathbf{e}$  を区別する必要があるないので、以下微小ひずみとして  $\boldsymbol{\varepsilon}$  を用い、以後単にひずみと呼ぶ。また、式(2.2.14)と式(2.2.15)から明らかなように、ひずみは 2 階対称テンソルであることが分かる。

## 2.3 力学の基本法則

### 2.3.1 力学法則の記述法

#### 2.3.1(a) Lagrange 表示と Euler 表示

連続体力学の基本法則を記述する方法は 2 つある。Lagrange 表示は基準配置における物質点  $X$  の位置ベクトル  $\mathbf{X}$  と時刻  $t$  を独立変数とする。このとき  $X_i$  を物質座標 (material coordinate) と呼ぶこともある。一方、Euler 表示は現配置における位置ベクトル  $\mathbf{x}$  と時刻  $t$  を独立変数とする。このとき  $x_i$  を空間座標 (spatial coordinate) と呼ぶこともある。

#### 2.3.1(b) 物質時間微分

Lagrange 表示における時間による偏微分を物質時間微分 (material time derivative) と呼び、上付きのドット “ $\cdot$ ” 表わす。物質時間微分の物理的な意味は、ある物質点とともに運動する観測者から見た時間変化である。ある物理量  $\psi$  を Euler 表示したとき、 $\dot{\psi}$  は次のように計算される。

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3.1)$$

ここに、速度  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  は、 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  が与えられると  $\mathbf{0} = \dot{\mathbf{X}} = \partial \mathbf{X} / \partial t + (\partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}) \mathbf{v}$  を  $\mathbf{v}$  について解いて求められる。

### 2.3.2 質量保存の法則

古典力学において質量は保存されなければならない。この要請を質量保存則という。

#### 2.3.2(a) 連続体力学における質量保存則

時刻  $t$  における配置での単位体積当りの質量を位置  $\mathbf{x}$  および  $t$  の関数として  $\rho(\mathbf{x}, t)$  と表わし、密度 (density) と呼ぶ。また基準配置での単位体積当りの質量を  $\mathbf{X}$  の関数として  $\rho_0(\mathbf{X})$  と表わし、基準密度 (reference density) と呼ぶ。

そして、基準配置で領域  $D_0$  を占める物質が時刻  $t$  で領域  $D$  を占めるとする  $D \equiv \mathbf{X}(D_0, t)$ 。このとき質量保存則の積分形は次のように表わせる。

$$\int_D \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{D_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV \quad (2.3.2)$$

また、式(2.3.2)で  $\mathbf{x}$  を  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  による像とみれば、積分変数の変換により

$$\rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) \quad (2.3.3)$$

が得られる。これは質量保存則の Lagrange 表示による局所形である。Euler 表示は式(2.3.3)の  $\mathbf{X}$  に  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  を代入しても得られるが、通常は式(2.3.3)に物質時間微分を作用させた次式を用いる。

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0 \quad (2.3.4)$$

ここで、 $\mathbf{D}$  はストレッチングテンソルである。

#### 2.3.2(b) 質量保存則の応用

一般に次式が成立する。

$$\frac{d}{dt} \left( \int_D \rho f \, dv \right) = \int_D \rho \dot{f} \, dv \quad (2.3.5)$$

ここで、 $f$  は  $(\mathbf{x}, t)$  の任意関数である。

### 2.3.3 運動の法則

以下 Euler 表示を用いて運動の諸法則を述べる。

#### 2.3.3(a) Cauchy の表面力

連続体中の点  $\mathbf{x}$  を通る曲面  $S$  を考え、 $\mathbf{x}$  における単位法線ベクトルを  $\mathbf{n}$  とする。 $\mathbf{x}$  まわりの微小面素  $\alpha$  を通して  $\mathbf{n}$  の向いている側の連続体が、 $-\mathbf{n}$  の向いている側の連続体に及ぼす力の合力を  $\mathbf{P}$  とする。 $\alpha$  の面積を  $|\alpha|$  と表わし、

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lim_{|\alpha| \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}}{|\alpha|} \quad (2.3.6)$$

が存在すれば、これを Cauchy の表面力と呼ぶ。 $\mathbf{t}$  は  $(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  のみの関数であり  $S$  の曲率に依存しない。

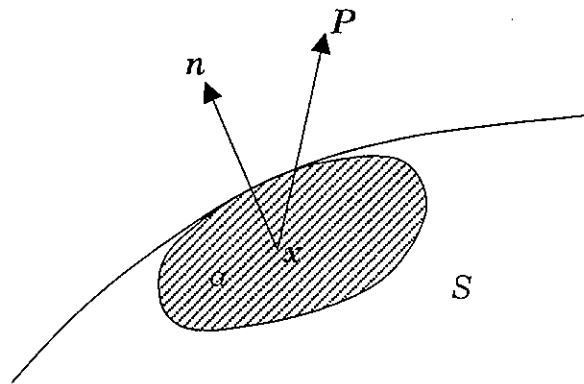


図 2.3 Cauchy の表面力

#### 2.3.3(b) 物体力

重力、ローレンツ (Lorenz) 力等、近接作用によらない外力を物体力という。単位体積当りの物体力を  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  で表わす。

### 2.3.3(c) 運動法則の積分形

時刻  $t$  に領域  $D$  を占める物質は

$$\int_D \rho v \, dv, \quad \int_D \rho \mathbf{x} \times v \, dv \quad (2.3.7)$$

で定義される運動量 (linear momentum) および角運動量 (angular momentum) を有する。そして連続体力学では、剛体の力学における Euler の法則と同様に次の 2 つの保存則を要請する。

運動量保存則 (conservation of linear momentum)

: 表面力、物体力の合力は運動量の物質時間微分に等しい。

$$\int_D \mathbf{t} \, da + \int_D \rho \mathbf{b} \, dv = \frac{d}{dt} \int_D \rho v \, dv = \int_D \rho \dot{v} \, dv \quad (2.3.8)$$

角運動量保存則 (conservation of angular momentum)

: 表面力と物体力の合モーメントは角運動量の物質時間微分に等しい。

$$\int_D \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da + \int_D \mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \, dv = \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{x} \times \rho v \, dv = \int_D \mathbf{x} \times \rho \dot{v} \, dv \quad (2.3.9)$$

### 2.3.4 応力原理

いま領域  $D$  として特に  $n+1$  個の平面  $S, S_1, \dots, S_n$  で囲まれた多面体を考える。  $D$  に運動量保存則を適用し、かつ  $D$  を相似的に点  $\mathbf{x}$  に収束させる。このとき、面積積分および体積積分の項はそれぞれ  $D$  の代表長の 2 次および 3 次の項であるので、物体力と加速度が有界であるならば、体積積分の項は面積積分の項に比較して十分小さいとみなせる。したがって、  $S, S_i$  の面積を  $|S|, |S_i|$  とすると

$$\mathbf{t} = - \sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{t}_i \quad (2.3.10)$$

を得る。ここに、  $\mathbf{t}_i$  は  $S_i$  に作用する表面力であり、一方  $S, S_i$  の外向き法線ベクトル  $\mathbf{n}, \mathbf{n}_i$  を用いると、発散定理より次式を得る。

$$\mathbf{n} = -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{n}_i \quad (2.3.11)$$

また, Cauchy の表面力より,  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ ,  $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_i)$  であるので, 式(2.3.11)を  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  に代入し, 式(2.3.10)に  $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_i)$  を代入すると, それぞれ,

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{n}_i) \quad (2.3.12)$$

$$\mathbf{t} = -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{t}_i = -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_i) \quad (2.3.13)$$

を得る. 上式より,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{n}_i) = -\sum_{i=1}^n \frac{|S_i|}{|S|} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_i) \quad (2.3.14)$$

であるので,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  が  $\mathbf{n}$  の関数として線形であることがわかる. したがって, あるテンソル  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  があって,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  は

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n} \quad (2.3.15)$$

とかける. このとき  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  を Cauchy 応力 (Cauchy stress) と呼び, 式(2.3.15)を Cauchy の式 (Cauchy's formula) という. また, 以上の応力の存在を指して応力原理 (stress principle) という. そして微小変形論においては,  $\mathbf{T}$  を  $\boldsymbol{\sigma}$  と表わし, 単に応力と呼ぶ.

### 2.3.5 運動方程式

#### 2.3.5(a) 運動量保存則の局所形

Cauchy の式(2.3.15)と発散定理を用いると式(2.3.8)より, 次式の運動量保存則の局所系を得る.

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.3.16)$$

同様に, 式(2.3.9)と式(2.3.16)より, 角運動量保存則は Cauchy 応力の対称性を要求することがわかる.



$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.3.17)$$

式(2.3.16)と式(2.3.17)を運動方程式と呼ぶ。

#### 2.3.5(b) 力学的エネルギー保存則

$$K = \frac{1}{2} \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dv \quad (2.3.18)$$

を  $D$  の運動エネルギー (kinetic energy) と呼ぶ。このとき運動方程式および Cauchy の式 (2.3.15) から

$$\int_{\partial D} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_D \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv = \dot{K} + \int_D \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, dv \quad (2.3.19)$$

を得る。式(2.3.19)または式(2.3.19)を時間積分した式を力学的エネルギー保存則と呼ぶ。これは運動方程式の系であり、独立して力学原理ではない。

### 2.4 弾性体

前述のひずみおよび応力を結び付け、物体固有の性質を表わすものが構成式と呼ばれるものであり、その中で最も基本的な弾性体について述べる。

弾性体とは、現在の応力が過去の変形勾配に依存せず、現在の変形勾配によってのみ決まる物質であり、変形勾配から得られるひずみによって表わすと

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.4.1)$$

となる。弾性体の中で、特に弾性ポテンシャルが存在するような弾性体は Green 弾性体 (Green elastic material) あるいは超弾性体 (hyperelastic material) と呼ばれ、これに対して、弾性ポテンシャルの存在を仮定せずに、単に応力とひずみが 1 対 1 に対応する構成式を持つ材料は Cauchy 弾性体 (Cauchy elastic material) と呼ばれる。

ここで弾性ポテンシャルとは、外力が作用すると物体は変形し、このとき外力が物体になした仕事は、物体内部に蓄えられ、外力を取り除くと全て吐き出されるポテンシャルエネルギーのことである。この弾性ポテンシャルエネルギーはひずみエネルギーとも呼ばれ、単軸の応力 - ひずみ曲線において、図中の薄墨部分の面積に相当する。

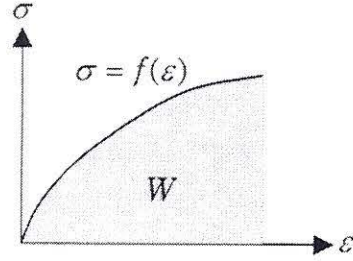


図 2.4 単軸の場合の応力 - ひずみ曲線とひずみエネルギー

ここで、ひずみエネルギー  $W$  は図中の薄墨部分の面積であることから、

$$W = \int \sigma d\varepsilon \quad (2.4.2)$$

と表わせ、 $\sigma = f(\varepsilon)$  がフックの法則 (Hooke's law) に従い、ヤング率  $E$  を用いて、

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.4.3)$$

と表わせるなら、

$$W = \int \sigma d\varepsilon = \int E\varepsilon d\varepsilon = E \int \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma\varepsilon \quad (2.4.3)$$

となる。このことは、単軸の場合の応力とひずみの関係のみでなく、2 階テンソルである応力テンソルとひずみテンソルの関係においても成立し、そのような場合は一般化フックの法則 (generalized Hooke's law) と呼ばれ、次式で与えられる。

$$\sigma = \mathbf{E}\varepsilon, \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.4.4)$$

上式右辺の  $\mathbf{E}$  は弾性係数テンソル (elastic moduli tensor) と呼ばれ、4 階テンソルである。また、同様にひずみエネルギーは、

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot \mathbf{E}\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon, \quad W = \frac{1}{2} E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (2.4.5)$$

と表わせる.

ここで、弾性係数テンソル  $\mathbf{E}$  は  $3^4=81$  個の成分を持つが、応力テンソルとひずみテンソルの対称性により、

$$E_{ijkl} = E_{jikl}, \quad E_{ijkl} = E_{jilk} \quad (2.4.6)$$

を満足するので、独立な成分の数は  $6 \times 6 = 36$  個となる. さらにひずみエネルギーが存在するときには、

$$E_{ijkl} = E_{klij} \quad (2.4.7)$$

という対称性が加わり、独立な成分の数は 21 個になる.

また、物体内のある 1 点において、どの方向に対しても物理的性質が変わらない場合、その物体は等方性 (isotropy) を有し、またどの方向に対しても物理的性質が異なる場合は異方性 (anisotropy) を有するといひ、独立な弾性定数の個数は物体の有する異方性の程度に依存する.

異方性の程度は、ある特定の軸のまわりに物体をある角度回転した場合、もとと同じ状態になっているか否かを調べることで、即ち対称性 (symmetry) を調べることによって定めることができる. 例えば、直交異方性材料 (orthotropic material) の場合は、3 つの互いに直交する 2 回対称軸をもつものであり、独立な弾性定数の数は 9 個になる. そして立方対称材料 (cubic symmetric material) の場合は、3 つの互いに直交する 4 回対称軸を持つ材料であり、独立な弾性定数の数は 3 個になる. 最後に等方材料 (isotropic material) は力学的特性に特別な方向性が存在しない材料であり、独立な弾性定数の数は 2 個になり、等方材料に対するフックの法則は次式となる.

$$\sigma = \lambda(\text{tr } \varepsilon)1 + 2\mu\varepsilon \quad (2.4.8)$$

ここで、 $\lambda$ 、 $\mu$  はラメの定数 (Lamé's constants) と呼ばれる.

また、線形等方弾性体で 1 軸引張りを考えると、 $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ 、 $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$  を式(2.4.8)に代入すると、

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + 2\lambda\varepsilon_{22} \quad (2.4.9)$$

$$0 = \lambda\varepsilon_{11} + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_{22} \quad (2.4.10)$$

となる。これより,

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} \quad (2.4.11)$$

を得る。ここで,

$$E \equiv \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu \equiv \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.4.12)$$

である。 $E$ はヤング係数 (Young's modulus) または縦弾性係数,  $\nu$ はポアソン比 (Poisson's ratio) と呼ばれる。 $E$ は引張応力とその方向のひずみの比であり,  $\nu$ は引張方向に垂直なひずみと引張方向のひずみの比に負号を付けた量である。次は, 一様膨張を考える。式(2.4.8)より,

$$\text{tr } \sigma = (3\lambda + 2\mu) \text{tr } \varepsilon \quad (2.4.13)$$

である。 $p = -(\text{tr } \sigma)/3$ は静水圧,  $\text{tr } \varepsilon$ は微小体積変化を表わすから,

$$K \equiv \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (2.4.14)$$

は体積弾性係数 (bulk modulus) と呼ばれる。

そして単純せん断変形を考える。今1つのせん断成分を除き, 他は0であるとする,

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \quad (2.4.15)$$

である。そこで $\mu$ を横弾性係数または剛性率 (shear modulus) と呼ぶ, 工学的には $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ をせん断ひずみと呼ぶことも多い。この場合,  $\mu$ はせん断応力とせん断ひずみの比おなる。このように, 線形等方弾性体の弾性係数は $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $K$ 等があるが, その中で独立なものは2個である。

### 3. 初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法<sup>1)~4)</sup>

初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法について考察する。まず、本来連続的な非線形方程式に対し、増分型反復法を用いて離散的に解を求める方法の基礎理論として、「 $f(x) = c$ 型」と「 $f(x, c) = g(x)$ 型」の2種類について述べる。これらは初期境界値問題を解くための有限要素解析を考慮した場合、それぞれ「荷重制御境界条件」と「変位制御境界条件」の増分型反復法に相当するものである。また、反復法として有限要素解析で一般的に用いられる Newton-Raphson 法に基づく手法を使用する。次に初期境界値問題を解くための有限要素解析における「荷重制御境界条件」と「変位制御境界条件」の増分型反復法の定式化について述べる。

#### 3.1 基礎理論

##### 3.1.1 $f(x) = c$ 型

これは一般的な Newton-Raphson 法であり、右辺が既知量であることから、有限要素解析においては荷重制御境界条件の反復法に相当するものである。

まず、 $f(x) = c$  より、残差を次式のように定義する。

$$r \equiv f(x) - c \quad (3.1.1)$$

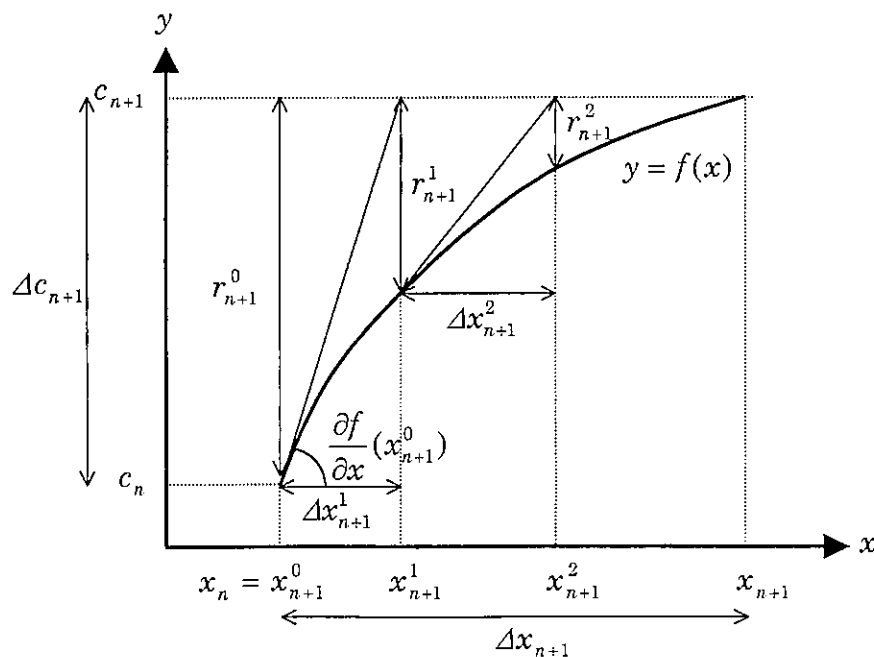


図 3.1  $f(x) = c$  型の概念図

本来連続的な非線形方程式  $f(x) = c$  を離散的な増分型として扱うために、最終目的の既知量  $c$  を  $m$  個に分割する。そして増分ステップ  $n$  回目の  $c$  の値を  $c_n$  とし、 $c_n$  に対応する  $x$  の値を同様に  $x_n$  とする。また、増分ステップ  $n$  回目から  $n+1$  回目への差分式を次式とする。ここで、右下添字は増分ステップの指標を意味する（図 3.1 参照）。

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + \Delta c_{n+1} \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x_{n+1} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

また、増分ステップの出発点（即ち、 $n = 0$ ）において、

$$r_0 = f(x_0) - c_0 = 0 \quad (3.1.3)$$

は満たされているものとする。これは、初期境界値問題を解くための有限要素解析においては、初期条件が釣りあい式を満たしていることに相当する。

今、増分ステップ  $n$  回目において、

$$r_n = f(x_n) - c_n = 0 \quad (3.1.4)$$

が満たされているとき、その次の増分ステップ  $n+1$  回目において、

$$r_{n+1} = f(x_{n+1}) - c_{n+1} = 0 \quad (3.1.5)$$

を満たす未知数  $x_{n+1}$  を求めるときの反復法を考える（図 3.1 参照）。

そして、反復ステップ  $i+1$  回目において、反復計算が収束したとすると、式(3.1.5)は、

$$r_{n+1}^{i+1} = f(x_{n+1}^{i+1}) - c_{n+1} = 0 \quad (3.1.6)$$

となる。また、反復ステップ  $i$  回目から  $i+1$  回目の差分式は、

$$x_{n+1}^{i+1} = x_{n+1}^i + \Delta x_{n+1}^{i+1} \quad (3.1.7)$$

とする。ここで、右上添字は反復ステップの指標を意味する（図 3.1 参照）。

次に、反復ステップ  $i$  回目の値を用いて、反復ステップ  $i+1$  回目の値に Taylor 展開の第 1 次近似を行うと、

$$f(x_{n+1}^{i+1}) \approx f(x_{n+1}^i) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i) \Delta x_{n+1}^{i+1} + O((\Delta x_{n+1}^{i+1})^2) \quad (3.1.8)$$

となり，式(3.1.6)は，

$$f(x_{n+1}^i) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i) \Delta x_{n+1}^{i+1} - c_{n+1} = 0 \quad (3.1.9)$$

となる．結局式(3.1.9)は，式(3.1.6)を考慮すると，次式のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i) \Delta x_{n+1}^{i+1} = -\{f(x_{n+1}^i) - c_{n+1}\} = -r_{n+1}^i \quad (3.1.10)$$

上式を誘導する際に  $r_{n+1}^{i+1} = 0$  としたが，式(3.1.10)において  $i = 0$  の場合を考慮すると，実

際には  $r_{n+1}^1 = 0$  とはならない（図 3.1 参照）．なぜなら式(3.1.10)の誘導の際に，非線形関数

$y = f(x)$  を Taylor 展開の第 1 次近似により，線形化しているからである．従って， $x_{n+1}$  を求めるために式(3.1.10)を残差がゼロになるまで反復計算を行わねばならず，そのアルゴリズムは以下のようになる．

1.  $\Delta x_{n+1}^{i+1} = -r_{n+1}^i / \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i)$
2.  $x_{n+1}^{i+1} = x_{n+1}^i + \Delta x_{n+1}^{i+1}$
3.  $r_{n+1}^{i+1} = f(x_{n+1}^{i+1}) - c_{n+1}$
4. if  $|r_{n+1}^{i+1}| \neq 0$ , then  $i \leftarrow i + 1$  and go to 1  
if  $|r_{n+1}^{i+1}| = 0$ , then iteration is converged

(3.1.11)

上記の反復計算により， $x_{n+1}^{i+1}$  は  $x_{n+1}$  に一致し，求める未知数  $x_{n+1}$  が得られる（図 3.1 参照）．従って， $f(x) = c$  型の増分型反復法のアルゴリズムは式(3.1.11)で表されることが分かる．

しかし実際は数値解析による近似計算を行うので、残差がゼロになるまで反復計算を行わず、通常は何らかの収束判定条件の下で解が収束した（即ち、 $x_{n+1} \approx x_{n+1}^{i+1}$  となった）とみなして、次の増分ステップの計算を行う。

### 3.1.2 $f(x, c) = g(x)$ 型

これは、前節の一般的な Newton-Raphson 法とは異なり、左辺と右辺共に未知数  $x$  が含まれていることから、有限要素解析においては変位制御境界条件の反復法に相当するものである。

前節と同様に、 $f(x, c) = g(x)$  より、残差を次式のように定義する。

$$r \equiv f(x, c) - g(x) \quad (3.1.12)$$

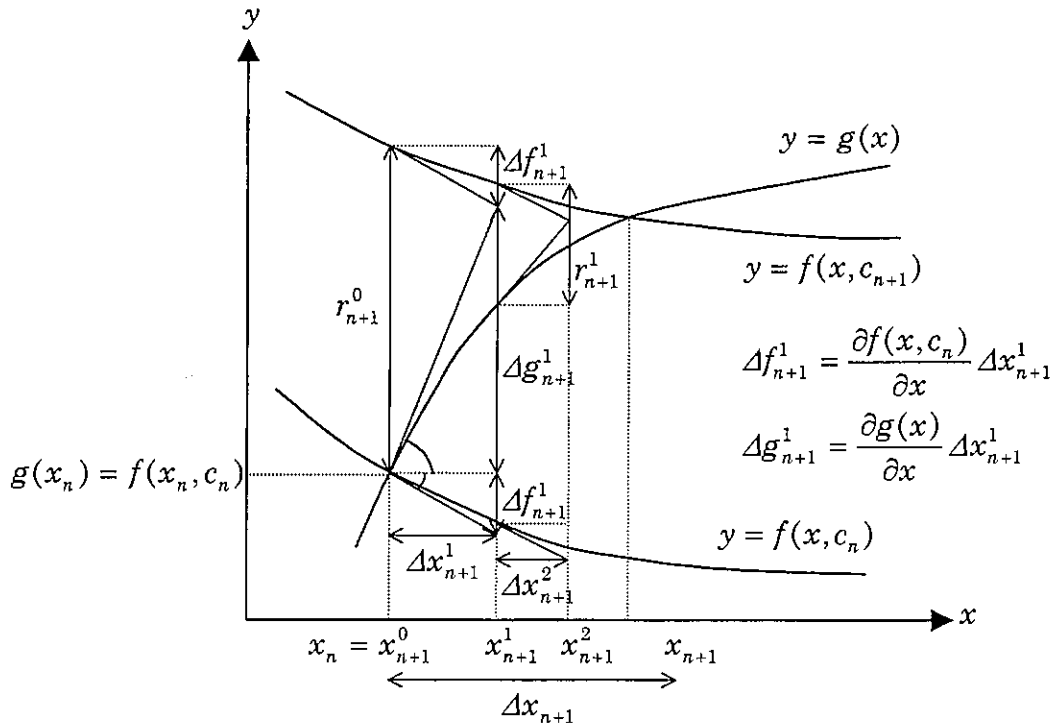


図 3.2  $f(x, c) = g(x)$  型の概念図

本来連続的な非線形方程式  $f(x, c) = g(x)$  を離散的な増分型として扱うために、最終目的の既知量  $c$  を  $m$  個に分割する。そして増分ステップ  $n$  回目の  $c$  の値を  $c_n$  とし、 $c_n$  に対応する  $x$  の値を同様に  $x_n$  とする。また、増分ステップ  $n$  回目から  $n+1$  回目への差分式を次式



とする。ここで、右下添字は増分ステップの指標を意味する（図 3.2 参照）。

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n + \Delta c_{n+1} \\ x_{n+1} &= x_n + \Delta x_{n+1} \end{aligned} \quad (3.1.2)\text{再}$$

また、増分ステップの出発点（即ち、 $n = 0$ ）において、

$$r_0 = f(x_0, c_0) - g(x_0) \quad (3.1.13)$$

は満たされているものとする。これは、初期境界値問題を解くための有限要素解析において、初期条件がつりあい式を満たしていることに相当する。

今、増分ステップ  $n$  回目において、

$$r_n = f(x_n, c_n) - g(x_n) \quad (3.1.14)$$

が満たされているとき、その次の増分ステップ  $n+1$  回目において、

$$r_{n+1} = f(x_{n+1}, c_{n+1}) - g(x_{n+1}) = 0 \quad (3.1.15)$$

を満たす未知数  $x_{n+1}$  を求めるときの反復法を考える（図 3.2 参照）。

そして、反復ステップ  $i+1$  回目において、反復計算が収束したとすると、式(3.1.15)は、

$$r_{n+1}^{i+1} = f(x_{n+1}^{i+1}, c_{n+1}) - g(x_{n+1}^{i+1}) = 0 \quad (3.1.16)$$

となる。また、反復ステップ  $i$  回目から  $i+1$  回目の差分式は、

$$x_{n+1}^{i+1} = x_{n+1}^i + \Delta x_{n+1}^{i+1} \quad (3.1.7)\text{再}$$

とする。ここで、右上添字は反復ステップの指標を意味する（図 3.2 参照）。

次に、反復ステップ  $i$  回目の値を用いて、反復ステップ  $i+1$  回目の値に Taylor 展開の第 1 次近似を行うと、

$$f(x_{n+1}^{i+1}, c_{n+1}) \approx f(x_{n+1}^i, c_{n+1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i, c_{n+1}) \Delta x_{n+1}^{i+1} + O((\Delta x_{n+1}^{i+1})^2) \quad (3.1.17)$$

$$g(x_{n+1}^{i+1}) \approx g(x_{n+1}^i) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_{n+1}^i) \Delta x_{n+1}^{i+1} + O((\Delta x_{n+1}^{i+1})^2) \quad (3.1.18)$$

となり、式(3.1.16)は、

$$f(x_{n+1}^i, c_{n+1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i, c_{n+1}) \Delta x_{n+1}^{i+1} - g(x_{n+1}^i) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_{n+1}^i) \Delta x_{n+1}^{i+1} = 0 \quad (3.1.19)$$

となる。結局式(3.1.19)は、式(3.1.16)を考慮すると、次式のようになる。

$$\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i, c_{n+1}) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_{n+1}^i) \right\} \Delta x_{n+1}^{i+1} = -\{f(x_{n+1}^i, c_{n+1}) - g(x_{n+1}^i)\} = -r_{n+1}^i \quad (3.1.20)$$

上式を誘導する際に  $r_{n+1}^{i+1} = 0$  としたが、式(3.1.20)において  $i = 0$  の場合を考慮すると、実際には  $r_{n+1}^1 = 0$  とはならない (図 3.2 参照)。なぜなら式(3.1.10)の誘導の際に、非線形関数  $y = f(x, c)$  そして  $y = g(x)$  を Taylor 展開の第 1 次近似により、線形化しているからである。従って、 $x_{n+1}$  を求めるために式(3.1.10)を残差がゼロになるまで反復計算を行わねばならず、そのアルゴリズムは以下のようになる。

1.  $\Delta x_{n+1}^{i+1} = -r_{n+1}^i / \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x_{n+1}^i, c_{n+1}) - \frac{\partial g}{\partial x}(x_{n+1}^i) \right\}$
2.  $x_{n+1}^{i+1} = x_{n+1}^i + \Delta x_{n+1}^{i+1}$
3.  $r_{n+1}^{i+1} = f(x_{n+1}^{i+1}, c_{n+1}) - g(x_{n+1}^{i+1})$
4. if  $|r_{n+1}^{i+1}| \neq 0$ , then  $i \leftarrow i + 1$  and go to 1  
if  $|r_{n+1}^{i+1}| = 0$ , then iteration is converged

(3.1.21)

上記の反復計算により、 $x_{n+1}^{i+1}$  は  $x_{n+1}$  に一致し、求める未知数  $x_{n+1}$  が得られる (図 3.2 参照)。従って、 $f(x, c) = g(x)$  型の増分型反復法のアルゴリズムは式(3.1.21)で表されることが分かる。

## 3.2 有限要素法への適用

### 3.2.1 荷重制御境界条件の場合の増分型反復法

まず、通常の有限要素定式化による結果として、次式を定義する。

$$\mathbf{F}^{\text{int}} \equiv \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) d\Omega_e \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} \equiv \mathbf{A} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_e^T \mathbf{t}_e d\Gamma_e \quad (3.2.2)$$

ここで、 $\mathbf{F}^{\text{int}}$  と  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  はそれぞれ全体内力ベクトルと全体外力ベクトル、 $\mathbf{N}_e$  と  $\mathbf{B}_e$  はそれぞれ要素形状行列と要素変形行列であり、右上添字の  $T$  はその行列の転置を意味する。また、 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  と  $\mathbf{t}_e$  はそれぞれ要素応力ベクトル、要素ひずみベクトルと要素表面力ベクトルであり、 $\Omega_e$  と  $\Gamma_e$  はそれぞれ要素の面積と境界を意味する。そして  $n_e$  は全要素数であり、 $\mathbf{A}$  は有限要素法で通常行われる要素の重ね合わせを意味し、要素組み立て演算子 (assembly operator) と呼ばれるものである。

今、式(3.2.1)において応力がひずみの関数として示されているが、これは弾性体の場合であり、その他の構成関係 (例えば、弾塑性体) を用いるならば、ひずみから応力を求める際に注意が必要である。しかし増分型反復法の定式化自体は同様に行うことが出来るので、簡単化のため弾性体の場合を用いて定式化を行うものとする。また、通常の有限要素法と同様に、ひずみは変位の関数として示される。以上より、次式となる。

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \approx \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{u}_e) \approx \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\mathbf{u}_e$  は要素変位ベクトルである。

そして、力のつりあいを満たすための全体残差力ベクトルを次式のように定義する。

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (3.2.4)$$

本来連続的な非線形方程式  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}}$  に時間的離散化を行い増分型として扱うために、最終目的の既知量  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  を  $m$  個に分割する。そして増分ステップ  $n$  回目の  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  の値を

$F^{\text{ext}}|_n$  とし,  $F^{\text{ext}}|_n$  に対応する全体変位ベクトル  $U$  の値を同様に  $U|_n$  とする. また, 増分ステップ  $n$  回目から  $n+1$  回目への差分式を次式とする. ここで, 右下添字は増分ステップの指標を意味する (図 3.2.1 参照).

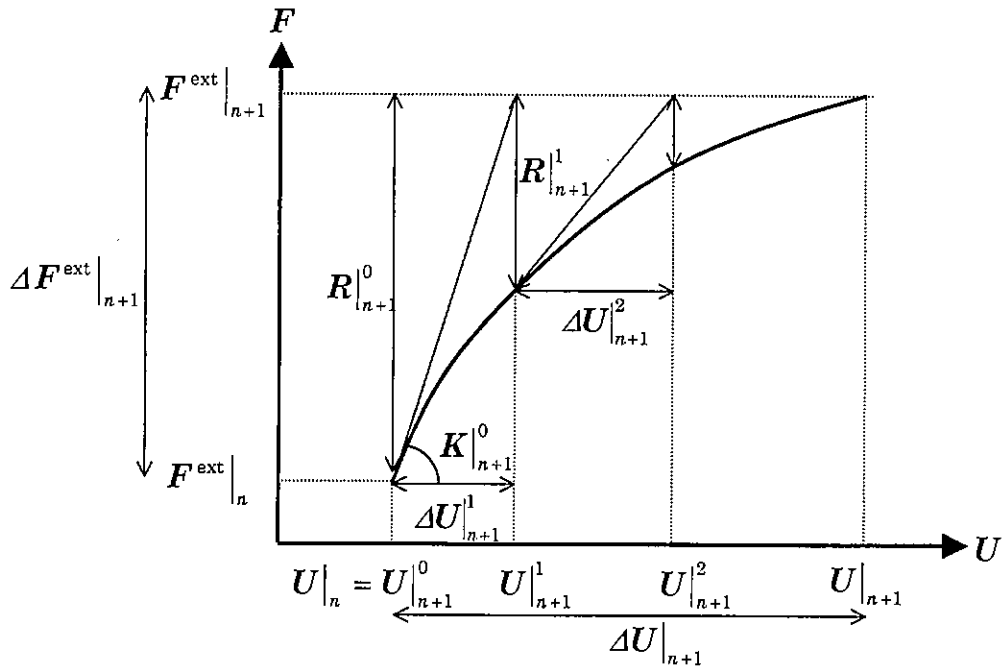


図 3.2.1 荷重制御境界条件の増分型反復法の概念図

$$\begin{aligned} F^{\text{ext}}|_{n+1} &= F^{\text{ext}}|_n + \Delta F^{\text{ext}}|_{n+1} \\ U|_{n+1} &= U|_n + \Delta U|_{n+1} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

また, 増分ステップの出発点 (即ち,  $n = 0$ ) において,

$$R|_0 = F^{\text{int}}|_0 - F^{\text{ext}}|_0 \quad (3.2.6)$$

は満たされているものとする. これは, 初期条件がつりあい式を満たしていることに相当する.

今, 増分ステップ  $n$  回目において,

$$R|_n = F^{\text{int}}|_n - F^{\text{ext}}|_n = 0 \quad (3.2.7)$$

が満たされているとき、その次の増分ステップ  $n+1$  回目において、

$$R|_{n+1} = F^{\text{int}}|_{n+1} - F^{\text{ext}}|_{n+1} = 0 \quad (3.2.8)$$

を満たす未知数  $U|_{n+1}$  を求めるときの反復法を考える (図 3.2.1 参照)。

そして、反復ステップ  $i+1$  回目において、反復計算が収束したとすると、式(3.2.8)は、

$$R|_{n+1}^{i+1} = F^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} - F^{\text{ext}}|_{n+1} = 0 \quad (3.2.9)$$

となる。また、反復ステップ  $i$  回目から  $i+1$  回目の差分式は、

$$\begin{aligned} U|_{n+1}^{i+1} &= U|_{n+1}^i + \Delta U|_{n+1}^{i+1} \\ u_e|_{n+1}^{i+1} &= u_e|_{n+1}^i + \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

とする。ここで、右上添字は反復ステップの指標を意味する (図 3.2.1 参照)。

次に、反復ステップ  $i$  回目の値を用いて、反復ステップ  $i+1$  回目の値に Taylor 展開の第 1 次近似を行うと、

$$\begin{aligned} F^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} &\approx F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{n_e} B_e^T \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e} \bigg|_{n+1}^i \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial u_e} \bigg|_{n+1}^i \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} d\Omega_e + O((\Delta u_e|_{n+1}^{i+1})^2) \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} \left\{ \left( \int_{\Omega_e} B_e^T D_e|_{n+1}^i B_e d\Omega_e \right) \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} \right\} \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} (k_e|_{n+1}^i \Delta u_e|_{n+1}^{i+1}) \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

となり、ここで、 $k_e$  は要素剛性行列、 $K$  は全体剛性行列である。以上より、式(3.2.9)は、

$$F^{\text{int}}|_{n+1}^i + K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} - F^{\text{ext}}|_{n+1} = 0 \quad (3.2.12)$$

となる。結局式(3.2.12)は、式(3.2.9)を考慮すると、反復法の方程式となる。

$$K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} = -(F^{\text{int}}|_{n+1}^i - F^{\text{ext}}|_{n+1}) = -R|_{n+1}^i \quad (3.2.13)$$

前節と同様に、 $R|_{n+1}^{i+1} = 0$  となるためには式(3.2.13)による反復計算を行わなければならない。そのための手順を以下に示す。

1. 全体剛性方程式を解く

$$\Delta U|_{n+1}^{i+1} = (K|_{n+1}^i)^{-1} (-R|_{n+1}^i)$$

2. 全体変位ベクトルを更新する。

$$U|_{n+1}^{i+1} = U|_{n+1}^i + \Delta U|_{n+1}^{i+1}$$

3. 全体変位ベクトルから要素変位ベクトルを抽出する

$$u_e|_{n+1}^{i+1} \leftarrow U|_{n+1}^{i+1}$$

4. 要素変位ベクトルから要素ひずみベクトルを求める。

$$\varepsilon_e|_{n+1}^{i+1} = B_e u_e|_{n+1}^{i+1}$$

5. 構成関係を用いて、要素ひずみベクトルから要素応力ベクトルを求める。

$$\sigma_e|_{n+1}^{i+1} = \sigma_e(\varepsilon_e|_{n+1}^{i+1})$$

6. 式(3.2.1)を用いて、要素応力ベクトルから全体内力ベクトルを求める。

$$F^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} B_e^T \sigma_e|_{n+1}^{i+1} d\Omega_e$$

7. 式(3.2.9)を用いて、全体残差力ベクトルを求める。

$$R|_{n+1}^{i+1} = F^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} - F^{\text{ext}}|_{n+1}$$

8. 全体残差力ベクトルを判定する。

$$|R|_{n+1}^{i+1}| \leq \text{tolerance} \quad \text{反復計算収束}$$

$$|R|_{n+1}^{i+1}| > \text{tolerance} \quad i \leftarrow i+1 \text{ として手順 1 へ戻る.}$$

### 3.2.2 変位制御境界条件の場合の増分型反復法

前節と同様に，通常の有限要素定式化による結果として，次式を定義する．

$$\mathbf{F}^{\text{int}} \equiv \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) d\Omega_e \quad (3.2.1 \text{ 再})$$

そして，変位制御境界条件における全体外力ベクトルは，強制変位を与えることによる反力として得られるものであり，荷重制御境界条件における全体外力ベクトルとは異なり，未知であるので，変位の関数として次式のように表す．

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}(\mathbf{U}) \quad (3.2.14)$$

ここで， $\mathbf{F}^{\text{int}}$  と  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  はそれぞれ全体内力ベクトルと全体外力ベクトル， $\mathbf{B}_e$  は要素変形行列であり，右上添字の  $T$  はその行列の転置を意味する．また， $\boldsymbol{\sigma}_e$  と  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  はそれぞれ要素応力ベクトルと要素ひずみベクトルと， $\Omega_e$  は要素の面積を意味する．そして  $n_e$  は全要素数であり， $\mathbf{A} = \sum_{e=1}^{n_e}$  は有限要素法で通常行われる要素の重ね合わせを意味し，要素組み立て演算子 (assembly operator) と呼ばれるものである．

今，式(3.2.1 再)において応力がひずみの関数として示されているが，これは弾性体の場合であり，その他の構成関係（例えば，弾塑性体）を用いるならば，ひずみから応力を求める際に注意が必要である．しかし増分型反復法の定式化自体は同様に行うことが出来るので，簡単化のため弾性体の場合を用いて定式化を行うものとする．また，通常の有限要素法と同様に，ひずみは変位の関数として示される．以上より，次式となる．

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e) \approx \mathbf{D}_e \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{u}_e) \approx \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e \quad (3.2.3 \text{ 再})$$

ここで， $\mathbf{u}_e$  は要素変位ベクトルである．

そして，力のつりあいを満たすための全体残差力ベクトルを次式のように定義する．

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (3.2.4 \text{ 再})$$

本来連続的な非線形方程式  $\mathbf{R} = \mathbf{F}^{\text{int}} - \mathbf{F}^{\text{ext}}$  に時間的離散化を行い増分型として扱うた

めに、各変数を  $m$  個に分割する。そして増分ステップ  $n$  回目の  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  の値を  $\mathbf{F}^{\text{ext}}|_n$  とし、

$\mathbf{F}^{\text{ext}}|_n$  に対応する全体変位ベクトル  $\mathbf{U}$  と全体内力ベクトル  $\mathbf{F}^{\text{int}}$  の値を同様に  $\mathbf{U}|_n$  と  $\mathbf{F}^{\text{int}}|_n$

とする。また、増分ステップ  $n$  回目から  $n+1$  回目への差分式を次式とする。ここで、右下添字は増分ステップの指標を意味する。

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1} &= \mathbf{F}^{\text{int}}|_n + \Delta \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1} \\ \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1} &= \mathbf{F}^{\text{ext}}|_n + \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1} \\ \mathbf{U}|_{n+1} &= \mathbf{U}|_n + \Delta \mathbf{U}|_{n+1}\end{aligned}\tag{3.2.15}$$

また、増分ステップの出発点（即ち、 $n=0$ ）において、

$$\mathbf{R}|_0 = \mathbf{F}^{\text{int}}|_0 - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_0\tag{3.2.6 再}$$

は満たされているものとする。これは、初期条件がつりあい式を満たしていることに相当する。

今、増分ステップ  $n$  回目において、

$$\mathbf{R}|_n = \mathbf{F}^{\text{int}}|_n - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_n = 0\tag{3.2.7 再}$$

が満たされているとき、その次の増分ステップ  $n+1$  回目において、

$$\mathbf{R}|_{n+1} = \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1} - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1} = 0\tag{3.2.8 再}$$

を満たす未知数  $\mathbf{U}|_{n+1}$  を求めるときの反復法を考える。

そして、反復ステップ  $i+1$  回目において、反復計算が収束したとすると、式(3.2.8 再)は、前節と異なり、式(3.2.14)を考慮して、

$$\mathbf{R}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} = 0\tag{3.2.16}$$



となる。また、反復ステップ*i*回目から*i*+1回目の差分式は、

$$\begin{aligned} F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} &= F^{\text{ext}}|_{n+1}^i + \Delta F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} \\ U|_{n+1}^{i+1} &= U|_{n+1}^i + \Delta U|_{n+1}^{i+1} \\ u_e|_{n+1}^{i+1} &= u_e|_{n+1}^i + \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

とする。ここで、右上添字は反復ステップの指標を意味する。

次に、反復ステップ*i*回目の値を用いて、反復ステップ*i*+1回目の値に Taylor 展開の第 1 次近似を行うと、

$$\begin{aligned} F^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} &\approx F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} \int_{\Omega_e} B_e^T \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e} \bigg|_{n+1}^i \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial u_e} \bigg|_{n+1}^i \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} d\Omega_e + O((\Delta u_e|_{n+1}^{i+1})^2) \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} \left\{ \left( \int_{\Omega_e} B_e^T D_e \bigg|_{n+1}^i B_e d\Omega_e \right) \Delta u_e|_{n+1}^{i+1} \right\} \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + \mathbf{A} (k_e|_{n+1}^i \Delta u_e|_{n+1}^{i+1}) \\ &= F^{\text{int}}|_{n+1}^i + K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} \end{aligned} \quad (3.2.11 \text{ 再})$$

となり、ここで、 $k_e$  は要素剛性行列、 $K$  は全体剛性行列である。以上より、式(3.2.9)は、

$$F^{\text{int}}|_{n+1}^i + K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} - F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} = 0 \quad (3.2.18)$$

となる。結局式(3.2.18)は、式(3.2.16)と式(3.2.17)を考慮すると、反復法の方程式となる。

$$\begin{aligned} K|_{n+1}^i \Delta U|_{n+1}^{i+1} &= -(F^{\text{int}}|_{n+1}^i - F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1}) \\ &= -\{F^{\text{int}}|_{n+1}^i - (F^{\text{ext}}|_{n+1}^i + \Delta F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1})\} \\ &= \Delta F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} - (F^{\text{int}}|_{n+1}^i - F^{\text{ext}}|_{n+1}^i) \\ &= \Delta F^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} - R|_{n+1}^i \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$\mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{0}$  となるためには式(3.2.19)による反復計算を行わなければならない。しかし荷

重制御境界条件の場合とは異なり、式(3.2.14)より、 $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1}$  は全体変位ベクトルの関数であり、未知であるので、式(3.2.19)のままでは反復計算を解くことができない。そのため式(3.2.19)を次式のように表す。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff} & \mathbf{K}_{fp} \\ \mathbf{K}_{pf} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}_{n+1}^i \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_f \\ \Delta \mathbf{U}_p \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}_f \\ \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}_p \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_f \\ \mathbf{R}_p \end{Bmatrix}_{n+1}^i \quad (3.2.20)$$

ここで右下添字の  $f$ ,  $p$  はそれぞれ, 'free', 'prescribed' を意味し,  $\Delta \mathbf{U}_f$  は未知の全体

変位増分ベクトル,  $\Delta \mathbf{U}_p$  は既知の全体変位増分ベクトル (即ち, 強制変位増分ベクトル),

$\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}_f$  は既知の全体外力増分ベクトル (物体力を無視した場合は  $\mathbf{0}$ ) であり,  $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}_p$  は未知の全体外力増分ベクトル (即ち, 支点反力) である。このように全体変位増分ベクトルを未知の部分と既知の部分に分け, それに対応するように各変数を分離すると, 結局, 今まで未知であった  $\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1}$  を未知の部分と既知の部分に分けることができる。

そして式(3.2.20)の既知の全体変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{U}_p$  を縮約すると次式を得る。

$$\mathbf{K}_{ff}|_{n+1}^i \Delta \mathbf{U}_f|_{n+1}^{i+1} = \Delta \mathbf{F}_f|_{n+1}^{i+1} + \mathbf{R}_f|_{n+1}^i - \mathbf{K}_{fp}|_{n+1}^i \Delta \mathbf{U}_p|_{n+1}^{i+1} \quad (3.2.21)$$

ここで,  $\Delta \mathbf{F}_f|_{n+1}^{i+1}$  は物体力を無視すれば, 常にゼロであり,  $\Delta \mathbf{U}_p|_{n+1}^{i+1}$  は, 反復ステップ第 1 回目においては既知であり (支点においてはゼロであり, 変位制御境界においては強制変位増分量である), 反復ステップ第 2 回目以降においては常にゼロとする。

結局,  $\mathbf{R}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{0}$  となるための式(3.2.19)による反復計算の手順をまとめると以下のようになる。

1. 全体剛性方程式を解く

$$\mathbf{K}_{ff}|_{n+1}^i \Delta \mathbf{U}_f|_{n+1}^{i+1} = \Delta \mathbf{F}_f|_{n+1}^{i+1} + \mathbf{R}_f|_{n+1}^i - \mathbf{K}_{fp}|_{n+1}^i \Delta \mathbf{U}_p|_{n+1}^{i+1}$$

2. 全体変位ベクトルを更新する.

$$\{\Delta \mathbf{U}\}_{n+1}^{i+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_f \\ \Delta \mathbf{U}_p \end{Bmatrix}_{n+1}^{i+1}, \quad \mathbf{U}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{U}|_{n+1}^i + \Delta \mathbf{U}|_{n+1}^{i+1}$$

3. 式(3.2.19)を用いて, 全体変位ベクトルから全体外力ベクトルを求める.

$$\Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{K}|_{n+1}^i \Delta \mathbf{U}|_{n+1}^{i+1} + \mathbf{R}|_{n+1}^i, \quad \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^i + \Delta \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1}$$

4. 全体変位ベクトルから要素変位ベクトルを抽出する

$$\mathbf{u}_e|_{n+1}^{i+1} \leftarrow \mathbf{U}|_{n+1}^{i+1}$$

5. 要素変位ベクトルから要素ひずみベクトルを求める.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e|_{n+1}^{i+1}$$

6. 構成関係を用いて, 要素ひずみベクトルから要素応力ベクトルを求める.

$$\boldsymbol{\sigma}_e|_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_e(\boldsymbol{\varepsilon}_e|_{n+1}^{i+1})$$

7. 式(3.2.1)を用いて, 要素応力ベクトルから全体内力ベクトルを求める.

$$\mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}_e|_{n+1}^{i+1} d\Omega_e$$

8. 式(3.2.16)を用いて, 全体残差力ベクトルを求める.

$$\mathbf{R}|_{n+1}^{i+1} = \mathbf{F}^{\text{int}}|_{n+1}^{i+1} - \mathbf{F}^{\text{ext}}|_{n+1}^{i+1}$$

9. 全体残差力ベクトルを判定する.

$$\|\mathbf{R}|_{n+1}^{i+1}\| \leq \text{tolerance} \quad \text{反復計算収束}$$

$$\|\mathbf{R}|_{n+1}^{i+1}\| > \text{tolerance} \quad i \leftarrow i+1, \quad (i \geq 2 \text{ の場合のみ } \Delta \mathbf{U}_p = 0)$$

として手順 1 へ戻る.

## 4. 強不連続解析の基礎理論

### 4.1 強不連続解析概要 1)・2)

ひずみおよび変位の不連続を通常の有限要素内挿関数に組み込んだ手法は、例えばコンクリートのフラクチャープロセスゾーン、金属のリュードス帯、そして土のせん断帯等でのひずみの局所化領域のモデル化を可能にする非常に有用な手法となっている。1986年のSimo<sup>3)</sup>、1987年のOrtiz, Leroy, と Needleman<sup>4)</sup>の先駆的な研究に続き、不連続を組み込んだ要素に関する研究が現在に至るまでの数多くの報告されており、近年も盛んに研究されている。それらの報告では、変位とひずみ（変位またはひずみ）の内挿関数を局所的に拡張することにより、有限要素法によるひずみの局所化問題の解が改良されることが説明されている。本節では、このような解析手法に関して、その歴史並びに概要を述べる。

まず初めに、コンクリートのき裂に関しては、き裂発生による付加的な変形を、変位の不連続（局所的なき裂の開口）にまとめた離散ひびわれモデル（discrete crack model）、またはこのような変形を物体中の局所体積に渡って分布するひずみが急変するものとして扱う分布ひびわれモデル（smeared crack model）が提案されている。

離散ひびわれモデルは、1976年 Hillerborg<sup>5)</sup>によって提案された仮想ひびわれモデル（fictitious crack model）が最初の報告であるとされている。しかしその基礎概念は、破壊力学の分野におけるDugdale, Barenblattらによる結合力モデル（cohesive force model）に基づいている<sup>6)</sup>。結合力モデルとは、ひびわれ先端から細長く分布する非線形領域を仮想のひびわれに置き換えて、その開口に抵抗する力（結合応力）が仮想ひびわれ面に作用する力学モデルである。

分布ひびわれモデルは、ひびわれを材料特性の変化としてモデル化し、ひびわれ発生後もコンクリートは連続体として扱われる。ひびわれ発生前のコンクリートは等方性材料としてモデル化され、ひびわれ発生後は直交異方性材料としてモデル化される。さらに、分布ひびわれモデルには、ひびわれ発生後のせん断特性の扱い方により、2つの方法があり、1つは固定ひびわれモデル、もう1つは回転ひびわれモデルである。固定ひびわれモデルは、ひびわれ発生後、そのひびわれ方向を固定し、主ひずみ方向が変化した場合に、ひびわれ面でのせん断伝達を考えるものである。これに対し回転ひびわれモデルは、ひびわれ発生後、ひびわれ方向を最大主ひずみ方向に一致させるよう回転させることで、常に主軸が一致するようにしたモデルである。即ち、ひびわれ面ではせん断ひずみ、せん断応力ともに常にゼロである。

これら2つの手法の長所と短所は、国際会議そして研究会等においてしばしば議論されている。そしてひずみ又は変位の不連続を通常の有限要素内部に組み込む最近盛んに報告されるようになった強不連続解析は、これらの手法の長所を組み合わせるものである。

既に幾人かの研究者によって述べられている様に、コンクリートの破壊に関する伝統的

な離散ひびわれモデルは、応力ロッキング（即ち、大きく開いたき裂を横切る見せかけの応力転移）が欠点となっている。非ゼロのせん断低減係数を持つ固定ひびわれモデルに関して、応力ロッキングは主にき裂発生後の主ひずみ軸の回転によって生じるせん断応力によるものである。しかし、ひずみや応力の主軸の配置が保たれる。つまりき裂に接する方向に応力が生じない回転ひびわれモデルでさえも応力ロッキングが観察されている。この理由は、見せかけの応力変化は、巨視的なき裂近傍の不連続変位場の十分な運動学的表現になっていない事によるものであることが示されている。もし（き裂の生じた要素の幅によって表現される）巨視的き裂の方向が要素辺に平行に生じないならば、個々のガウス点において有限要素内挿関数から決定される最大主ひずみの方向が巨視的き裂の法線方向と異なる。横方向の主応力がき裂の法線方向に非ゼロの値を持ち、そのことによりき裂成長過程の極めて遅い段階、即ちき裂に完全に応力が作用すべきでない段階においてさえ、き裂を横切って作用する結合応力が生じる。

scalar damage モデルでは、き裂が大きく開くにつれて応力の全成分はゼロになることから、このような応力ロッキングが生じないことが報告されている。材料の損傷過程の最終段階においてのみ応力ロッキングが生じるので、き裂の生成によって誘発された異方性を表現する構成モデルを用いるのが妥当であり、例えば、回転ひびわれモデルからき裂の開口がある限界値に達したときのみ scalar damage モデルに切り替える等である。回転ひびわれモデルと scalar damage を結合させる手法（RC-SD）が、多くの破壊試験の荷重-載荷点変位を再現出来るということを説明している。<sup>7), 8)</sup>

その他に、応力ロッキングは大きく局所化されたひずみの運動学的表現を改良することによっても避けることが出来る。これは最近 10 年の間に多くの研究者によって採用されている一般的な方法である。それらの手法はそれぞれ異なる名前で提案されているが、その全てに共通することは有限要素の内部に（ひずみ又は変位の）不連続を組み込んだ新しいアイデアに基づいている。

き裂が生じている要素の運動学的表現の初期の試みは完全脆性材料を考え、き裂が生成した後、その要素の垂直応力を急にゼロにするものである。弾性応力-ひずみ関係は次式のように示され、

$$\sigma = \mathbf{D}_e \varepsilon \quad (4.1.1)$$

ここで  $\sigma$  は応力成分の列マトリックス、 $\varepsilon$  はひずみ成分の列マトリックス、そして  $\mathbf{D}_e$  は弾性剛性マトリックスであり、平面応力の場合は以下のように示される。

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

ここで  $E$  はヤング係数そして  $\nu$  はポアソン比である。き裂が生じた後、 $D_e$  は式(4.1.2)の各成分を変化させた接線剛性マトリックス  $D_f$  によって置き換えられる。き裂に垂直そして水平に配置された局所的な座標系において、き裂の生じた要素の接線剛性は次式のように与えられる。

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

ここで  $\alpha$  はせん断低減係数であり（通常この値を  $\beta$  としている論文も多い）、0 から 1 の間に値を持つと仮定している。初期の研究において、せん断低減係数は非ゼロの定数と仮定されており、そのことが必然的にせん断による応力ロッキングを引き起こしていた。その後の改良により、せん断低減係数をき裂の開口の関数として扱い、き裂が大きく開くにつれせん断低減係数をゼロにするものである。回転ひびわれモデルは、せん断低減係数を必要としない、なぜならせん断剛性係数は応力とひずみの主軸が一致するという仮定によって一意的に決定されるものであるからである。

1987 年、Ortiz ら<sup>4)</sup>によって独創的な論文が報告された。四辺形有限要素を用いてせん断帯の解を改良するために、彼らは弱不連続を捕らえることの出来るひずみ場の拡張を行っている。付加されたひずみモードは音響テンソルに基づく局所的な分岐解析によって決定され、その形状は解析を通して一定に保たれる（大きさのみが成長する）。1 つの弱不連続線のみが要素内を横切ることが出来る、したがって、1 つの局所化されたせん断帯を表すためには、隣接の要素内での別の弱不連続線が必要となる。

その理論は Belytschko ら<sup>9)</sup>によって改良された。Belytschko らは、有限要素の中にひとつの局所化領域を組み込むことを提案した、即ち、1 つの要素が 2 つの平行な弱不連続線によって表される局所化されたせん断帯を含むことが出来るように考えた。そのせん断帯の幅は要素の大きさに依存せず、ひとつの材料パラメータとして考えることが出来る。その帯の方向もまた局所的な分岐解析によって決定され、付加的なひずみモードの開口とすべり成分の比は固定されていない、そのため要素がより柔軟に非比例過程を再現することを可能にしている。Fish と Belytschko はこのアプローチを大変形問題に応用し、粘塑性固

体に関するせん断帯の解析手法を提案している。

変位の不連続を要素内に組み込んだ非適合要素を用いた強不連続解析は、Dvorkin ら<sup>10)</sup>によって最初に提案された。彼らは、変位不連続（き裂の開口）における結合表面力の仕事を表現する項を付加した仮想仕事の原理を使用した。その有限要素法の要素は四辺形要素であった。一般的な双 1 次四辺形要素と三角形定ひずみ要素に関する類似の修正が、Klisinski<sup>11)</sup>そして共同研究者によって開発されている。使用された要素が単純である事により、変分原理は必要とされず、基礎方程式は物理的な考慮より得られている。

強不連続を有する要素の完全に整合した変分法による誘導が、Lotfi と Shing<sup>12)</sup>により行われている。彼らは結合表面力の仕事を表す付加的な項を含めた Hu-Washizu の原理に基づいて、そして enhanced assumed strain 法によるモデルを提案している。

連続体の軟化を示す応力-ひずみ則と境界面に関する応力-開口変位の関係は Simo ら<sup>13)</sup>によって詳細に研究されている。彼らは、分布的な性質の軟化係数を有する連続型の構成則によって強不連続性を表現できることを示した。不連続面上の構成則を仮定する代わりに、Dirac のデルタ関数の分布を近似する連続関数を用いる事により、連続体の構成則を利用することが可能であることを示した。彼らは、強不連続性を有する EAS 要素を発展させ、要素の性能を改良する非対称な定式化を提案した。この手法の応用が Armero, Garikipati<sup>14)</sup>や Oliver<sup>15), 16)</sup>によって行われている。近年、Oliver らは弱不連続から強不連続への遷移を有するモデルを提案している。

近似された変位不連続を持つ有限要素法は Larsson と Runesson<sup>18)</sup>によっても研究されている。彼らは、初期には変位不連続は要素境界のみに存在していると仮定していたが、後に有限要素の中に組み込んだ手法を提案している。その手法は、変位の不連続と間隙水圧を有する、土骨格と流体で満たされた混合体として考慮された非排水粘土の場合に応用されている。局所化ひずみの帯を組み込んだ要素は、Belytschko らのものと同様に、Sluys, Berends そして Borst<sup>19)</sup>によってコンクリートの破壊や粘土のせん断帯のモデル化に応用されている。

上述の文献において提案された多くの強不連続解析手法に対し、それらの共通の特徴や差異を指摘し、そしてその適用限界を見極めるための比較研究が Jirásek<sup>11)</sup>によって行われている。本章では、この Jirásek の分類を、運動学的拡張 (kinematic enhancement) や内部つりあい条件 (internal equilibrium condition) の種類に特に注意して、個々の定式化の差異を、最も簡単な有限要素 - 定ひずみ三角形要素 (CST) の挙動を考察することによって説明する。

#### 4.2 強不連続解析の変分原理による弱形式化

変位場  $\mathbf{u}$ 、ひずみ場  $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、そして応力場  $\boldsymbol{\sigma}$  の 3 つの独立な場を扱う一般的な変分原理より始める。これらの物理量が、変位と表面力が与えられた境界  $S_u$  と  $S_t$  の境界を持つ領域  $V$  内

において定義されているとする。この時,

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } S_u \quad (4.2.1)$$

とある種の正則性に関する制約を除き, 変位場  $\mathbf{u}$ , ひずみ場  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , そして応力場  $\boldsymbol{\sigma}$  は完全に任意かつ相互に独立であるとする。この時その他全ての支配方程式は次式の変分方程式によって置き換えられる。

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) dV + \delta \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot (\partial \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} dS \quad (4.2.2)$$

上式は任意の可容な変分  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  に対して成立しなければならない。式(4.2.2)において, 記号  $\delta$  は変分を意味する。 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$  は構成式を用いてひずみより計算される応力である,  $\partial$  は変位をひずみに変換する幾何学的演算子 (勾配演算子の対称部分を表す工学的表記) であり,  $\bar{\mathbf{b}}$  は既知の物体力,  $\bar{\mathbf{t}}$  は既知の表面力である。

式(4.2.2)の左辺第 2 積分項の変分を展開し, Green の定理を  $\partial \delta \mathbf{u}$  を含む項に適用し, 変分  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\delta \boldsymbol{\sigma}$  の独立性を考慮すると, 我々は式(4.2.2)より以下の式を得ることが出来る。

ひずみ-変位式

$$\partial \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (4.2.3)$$

構成式

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (4.2.4)$$

つりあい式

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (4.2.5)$$

静的境界条件

$$\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (4.2.6)$$

ここで  $\mathbf{n}$  は境界の外向き単位法線である。



### 4.3 有限要素離散化

式(4.2.3)～式(4.2.6)の弱形式を表す変分方程式(4.2.2)を離散化する．そのため、我々は未知の場を次式のように内挿する．

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c \quad (4.3.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e} \quad (4.3.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{S}\mathbf{s} \quad (4.3.3)$$

ここで  $\mathbf{N}$  は標準的な（通常の形状関数を含む）変位内挿行列であり， $\mathbf{B}$  は標準的な（形状関数の微分を含む）ひずみ内挿行列であり， $\mathbf{N}_c$  は  $\mathbf{G}$  はそれぞれ変位とひずみに対してある種の拡張項を含む行列であり， $\mathbf{S}$  は応力内挿行列であり，そしてベクトル  $\mathbf{d}$ ， $\mathbf{d}_c$ ， $\mathbf{e}$ ， $\mathbf{s}$  は，それぞれ節点変位，拡張変位モード，拡張ひずみモード，応力パラメータに相当する．上記の内挿関数は非常に一般的なものであり，そして EAS 法または B-bar 法等のように，いくつかの特別な手法にも適用できる．

近似式(4.3.1)～式(4.3.3)を変分方程式(4.2.2)に代入しそして  $\delta(\mathbf{N}\mathbf{d}) = \mathbf{B}\mathbf{d}$  を考慮すると次式を得る．

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \{ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) - \mathbf{S}\mathbf{s} \} dV \\ & + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} dV \\ & = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

ここで  $\mathbf{B}_c$  は変位内挿行列  $\mathbf{N}_c$  に対応するひずみ内挿行列であり（即ち， $\mathbf{B}_c$  は  $\delta(\mathbf{N}_c \mathbf{d}) = \mathbf{B}_c \mathbf{d}$  によって定義されている），

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (4.3.5)$$

は（標準的な）外力ベクトルであり，

$$\mathbf{f}_c = \int_V \mathbf{N}_c^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (4.3.6)$$

は、非標準的な外力ベクトルである。ここでは、簡単化のため荷重は、拡張内挿関数を持つ領域の外側だけに与えられている場合を考える、即ち  $f_c = \mathbf{0}$  を仮定する。

各変分の独立性を考慮すると、式(4.3.4)より、以下の方程式を得る。

$$\int_V \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (4.3.7)$$

$$\int_V \mathbf{G}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV - \int_V \mathbf{G}^T \mathbf{S}\mathbf{s} dV = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c dV - \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{G}\mathbf{e} dV = 0 \quad (4.3.9)$$

$$\int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} dV = 0 \quad (4.3.10)$$

$\tilde{\sigma}$  内のパラメータ  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{e}$  に関する依存性を線形化するために、速度型（増分型）の方程式ににするため、式(4.3.7)～(4.3.10)を時間に関して微分する。その場合、与えられた状態に関して、任意の増分線形応力－ひずみ式は形式的に次式の数値形で記述出来る。

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\epsilon} \approx \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{e}}) \quad (4.3.11)$$

ここで  $\mathbf{D} \equiv \partial \tilde{\sigma} / \partial \epsilon$  は材料の接線剛性行列である。式(4.3.11)を式(4.3.7)～(4.3.10)へ代入すると次の連立1次方程式を得る。

$$\int_V \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & 0 & 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} & -\mathbf{G}^T \mathbf{S} & 0 \\ 0 & -\mathbf{S}^T \mathbf{G} & 0 & \mathbf{S}^T \mathbf{B}_c \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_c^T \mathbf{S} & 0 \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\mathbf{d}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.12)$$

応力とひずみの内挿は不連続にすることが出来、つまり各応力やひずみパラメータが1つの有限要素にのみ関連している内挿関数を選ぶことが出来る。同じことが拡張変位パラメータに関して成立する。それ故パラメータ  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{d}_c$  は局所（要素）レベルにおいて消

去することが出来る。即ち全体の方程式は標準的な変位の自由度  $\mathbf{d}$  のみを含だ式に出来る。

以下、ある体積  $V_e$  を占める 1 つの有限要素のみを考え、その要素に対して与えられる式 (4.3.7)～(4.3.10) と式 (4.3.12) を考える。その場合、外力ベクトル  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  は、その要素に作用する内力  $\mathbf{f}_{\text{int}}^e$  によって置き換えられる。

#### 4.4 強不連続解析の分類化

既往の研究報告に見られる強不連続解析を 3 つの基本的な手法に分類し、それらは一般的な定式化である式 (4.3.7)～(4.3.10) の特別な場合又は修正である事を示す。

まず式 (4.3.9) と式 (4.3.10) は  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{d}_e$  に関して既に線形であるので、まずそれらを考察する。ここで、任意の変位拡張項を導入せず、即ちひずみの内挿のみ拡張することを仮定する。その時  $\mathbf{d}_e$ ,  $\mathbf{N}_e$ , 又は  $\mathbf{B}_e$  を含む全ての項は消去することが出来る。即ち式 (4.3.10) は存在せず (なぜなら、それは  $\mathbf{d}_e$  の変分を取ることによって得られているからである)、そして式 (4.3.9) は次式のようになる。

$$\int_V \mathbf{S}^T \mathbf{G} dV \mathbf{e} = 0 \quad (4.4.1)$$

次に一般的なパッチテストを満たすために、要素は正確に一定応力場を再現出来なければならない。その場合、応力内挿行列として、最も簡単な場合、 $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  = 単位行列を選ぶと、適合条件式 (4.4.1) は次式となる。

$$\int_V \mathbf{G} dV \mathbf{e} = 0 \quad (4.4.2)$$

この時、行列  $\mathbf{G}$  は常に次式を満たすように決定することが出来る。

$$\int_V \mathbf{G} dV = 0 \quad (4.4.3)$$

この時、式 (4.3.9) が任意の  $\mathbf{e}$  に関して満たされる。更に、式 (4.3.8) に  $\mathbf{s}$  を掛けた行列はゼロ行列となるので、応力パラメータ  $\mathbf{s}$  は完全に定式化から消去出来る。したがって我々は結局次式 of 非線形連立方程式を得る。

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = \mathbf{f}_{\text{int}}^e \quad (4.4.5)$$

$$\int_{V_e} \mathbf{G}^T \sigma(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV = 0 \quad (4.4.6)$$

また、上式は次式のように線形化出来る。

$$\int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4.7)$$

もし  $\mathbf{D}$  が対称であるなら式(4.4.7)の線形化された連立方程式も対称であることに注意する。

次にその他の手法として  $\partial(\mathbf{N}_e \mathbf{d}) = \mathbf{B}_e \mathbf{d}$  の関係にある、適切な拡張変位内挿行列  $\mathbf{N}_e$  を考える。そして  $\mathbf{G} = \mathbf{B}_e$  とすることによって、対応する行列  $\mathbf{B}_e$  を考える。その時、式(4.3.9)は  $\mathbf{d}_e = \mathbf{e}$  とすることによって ( $\mathbf{S}$  の選択に無関係に) 常に成立する。式(4.3.10)は応力パラメータ  $\mathbf{s}$  に関するいくつかの制約を課すが、重要な点は式(4.3.10)を式(4.3.8)に加えることによって応力パラメータを消去出来、結局前述のものと同じ方程式、即ち式(4.4.5)と(4.4.6)と全く同じ式が得られる事である。この場合両者の違いは、行列  $\mathbf{G}$  が条件(4.4.3)を満たすものを使用するか、 $\partial \mathbf{N}_e = \mathbf{G}$  の関係にある  $\mathbf{G}$  を使用するかにある。

一方、Simo と Oliver は変分原理によらない支配方程式を提案しており、この手法は前述の2つの手法の折衷案になっている。その手法ではひずみ内挿式(4.3.2)において  $\mathbf{G} = \mathbf{B}_e$  を用いるが、式(4.4.6)における  $\mathbf{G}^T$  を  $\mathbf{B}_e$  の転置ではなく、条件式(4.4.2)を満たす行列  $\mathbf{G}^*$  によって置き換えている。この方法によって要素の性能の改良される理由を後述する。その結果、線形化された方程式は次式となる。

$$\int_{V_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{B} & \mathbf{G}^* \mathbf{D} \mathbf{G} \end{bmatrix} dV \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{\text{int}}^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.4.8)$$

上式の剛性行列はたとえ材料剛性行列  $\mathbf{D}$  が対称だとしても一般的に非対称となる。

上述の最初の方法では、得られる要素の表面力連続条件を良く満たしているが変位又はひずみ不連続を正しく表現出来ていないこと、他方、2番目の方法では、得られる要素は不連続性を良く反映しているが表面力連続条件の近似が良くないことを後述する。上述の2つの場合はそれぞれ statically optimal symmetric (SOS) 定式化と kinematically optimal

symmetric (KOS) 定式化と呼ぶものとする。一方、3 番目の手法は運動学かつ静的の両方の見方を正しく表現出来る可能性を持っているので、statically and kinematically optimal nonsymmetric (SKON) 定式化と呼ぶ。

#### 4.5 2次元の場合の各手法

##### 4.5.1 2次元の局所帯

簡単化のため、我々は3 角形要素によって離散化される平面問題の場合を考察する。幅  $k$  のを含むある要素を仮定する。その要素は局所化された、ひとつのひずみの領域  $L$  とその残り  $N$  に分けられ、 $N$  は2つの別々の領域  $N_-$  と  $N_+$  から成るとする。その要素中に、局所帯に沿った局所座標系  $(x, y)$  を考える。  $x$  軸は局所帯に垂直であり、  $y$  軸は局所帯に平行であるとする。もし  $A_L$  が局所帯の面積であるなら、その局所帯の等価長さ  $l = A_L / k$  を定義する。また等価‘要素幅’ (特性的大きさ)  $h = A_e / l$  を定義すると、  $A_L / A_e = kl / hl = k / h$  の関係にある。この時、非局所化領域の面積は  $A_N = A_e - A_L = (h - k)l$  となる。(図 4.1 参照)

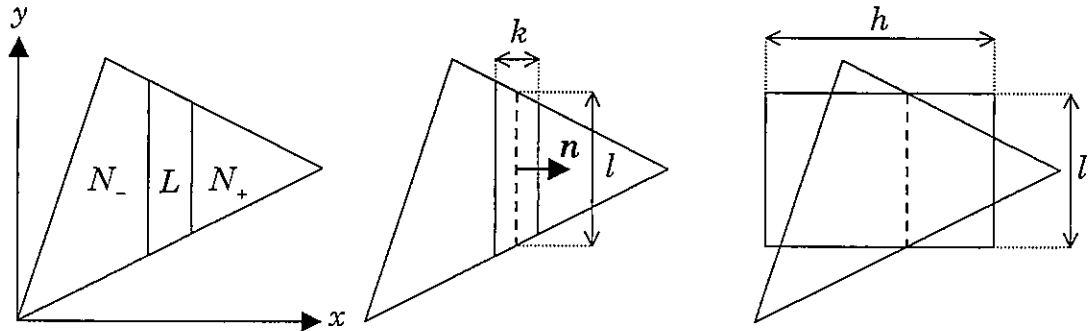


図 4.1 局所帯を持つ三角形要素

##### 4.5.2 Statically optimal symmetric 定式化

###### 4.5.2.a 局所帯を有する要素

局所帯の境界において一定のジャンプを許すひずみの拡張  $\varepsilon_x$  と  $\gamma$  を用いると次式が得られる。

$$G = \frac{1}{kA_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) P \quad (4.5.1)$$

ここで、

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

であり、 $\chi_L$  と  $\chi_N$  はそれぞれ局所帯そしてその残り領域の特性関数であり、次式で示される。

$$\begin{cases} \chi_L = 1 \\ \chi_N = 0 \end{cases} \quad \text{in } L, \quad \begin{cases} \chi_L = 0 \\ \chi_N = 1 \end{cases} \quad \text{in } N_-, N_+ \quad (4.5.3)$$

即ち、行列  $\mathbf{G}$  は区分的に一定でありそして次式のように表現され、

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}_L \chi_L + \mathbf{P}_N \chi_N \quad (4.5.4)$$

ここで、

$$\mathbf{P}_L = \frac{A_N}{kA_e} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}_N = -\frac{A_L}{kA_e} \mathbf{P} \quad (4.5.5)$$

である。

式(4.5.3)における  $\chi_L$  と  $\chi_N$  の係数は、 $\mathbf{G}$  が式(4.4.3)を満たすように選ばれている。実際に、

$$\int_{A_e} (A_N \chi_L - A_L \chi_N) dA = A_N A_L - A_L A_N = 0 \quad (4.5.6)$$

となる。上式中の係数  $1/kA_e$  は  $\mathbf{e}$  の成分が局所化そして非局所化領域の間の垂直ひずみとせん断ひずみの差に局所帯の幅  $k$  を掛けられたものを意味するように選ばれている。局所帯の幅  $k$  がゼロに近づく極限において、それらは強（変位）不連続の開口そしてすべり成分となる。

式(4.4.5)に従うと、内力は次式のように表される。

$$f_{\text{int}}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \tilde{\sigma} dA = \int_{A_L} \mathbf{B}^T \sigma_L dA + \int_{A_N} \mathbf{B}^T \sigma_N dA \quad (4.5.7)$$

ここで  $\sigma_L$  は局所帯における応力であり、次式のひずみより計算され、

$$\varepsilon_L = \mathbf{B}d + \mathbf{P}_L e = \mathbf{B}d + \frac{A_N}{kA_e} \mathbf{P}e \quad (4.5.8)$$

また  $\sigma_N$  は局所帯の外側の応力であり、次式のひずみより計算される。

$$\varepsilon_N = \mathbf{B}d + \mathbf{P}_N e = \mathbf{B}d - \frac{A_L}{kA_e} \mathbf{P}e \quad (4.5.9)$$

応力は内部つりあい条件式(4.4.6)を満たさなければならず、式(4.5.1)によって定義される行列  $\mathbf{G}$  を使うと、式(4.4.6)は次式のようになる。

$$\frac{A_N}{kA_e} \int_{A_L} \mathbf{P}^T \sigma_L dA - \frac{A_L}{kA_e} \int_{A_N} \mathbf{P}^T \sigma_N dA = 0 \quad (4.5.10)$$

上式を整理すると、次式を得る。

$$\frac{1}{A_L} \int_{A_L} \mathbf{P}^T \sigma_L dA = \frac{1}{A_N} \int_{A_N} \mathbf{P}^T \sigma_N dA \quad (4.5.11)$$

ここで、 $\mathbf{P}^T$  を掛けることにより、上式の第1積分と第3成分は垂直応力  $\sigma_{xx}$  そしてせん断応力  $\tau_{xy}$  を表していることに注意する。それ故、式(4.5.11)は、局所帯に渡って面積平均される  $\sigma_{xx}$  と  $\tau_{xy}$  が非局所帯に渡って平均される  $\sigma_{xx}$  と  $\tau_{xy}$  と同じでなければならないことを示す弱応力連続条件として解釈することが出来る。

#### 4.5.2.b 不連続線を持つ要素

局所帯の厚さがゼロになり、その局所帯が曲線  $S_L$  となる極限を考える。拡張ひずみ内挿行列の定義式(4.5.1)は次式のように書き直され、

$$\mathbf{G} = \frac{1}{kh l} \{ (h-k) l \chi_L - k l \chi_N \} \mathbf{P} = \left( \frac{h-k}{hk} \chi_L - \frac{1}{h} \chi_N \right) \mathbf{P} \quad (4.5.12)$$

$k \rightarrow 0$ につれて、 $\chi_L/k$ の項は Dirac のデルタ関数 $\delta_L$ になり、結局  $\mathbf{G}$ は次式のようになる。

$$\mathbf{G}_0 = (\delta_L - \frac{1}{h})\mathbf{P} \quad (4.5.13)$$

局所帯の内力への寄与はなくなり、式(4.5.7)は次式となる。

$$f_{\text{int}}^e = \int_{A_e} \mathbf{B}^T \tilde{\sigma} dA \quad (4.5.14)$$

ここで我々は $\sigma_N$ の代わりに $\sigma$ と記述する、なぜなら非局所領域  $N$  は今不連続曲線  $S_L$  を除いた全要素に渡っているからである。同様の理由により、 $\varepsilon_N$ における下付き添字を省略する。

この時、式(4.5.11)において、 $\mathbf{P}^T \sigma_L$ は結合表面力 $\mathbf{t}$ によって置き換えられ、その結果としての内部つりあい条件

$$\frac{1}{l} \int_{S_L} \mathbf{t} dA = \frac{1}{A_e} \int_{A_e} \mathbf{P}^T \sigma dA \quad (4.5.15)$$

は不連続線  $S_L$  に渡って平均された表面力は要素全体に渡って平均された応力の第1そして第3成分 ( $\sigma_x$ そして $\tau$ ) と等しくなければならない事を表す。これは局所化された不連続線を横切る表面力連続条件の弱形式である。

#### 4.5.2.c 局所帯を有する3角形定ひずみ要素

離散化された方程式のより進んだ洞察を得るために、最も簡単な要素—CST—に有限な局所帯があるものを考える。局所帯の内部のひずみ $\varepsilon_L$ 一定であり、そして局所帯の外側のひずみ $\varepsilon_N$ も一定（しかし一般的に $\varepsilon_L$ とは異なる）であると仮定し、続いて、応力も又区分的に一定であると仮定し、結果的に内力は次式のようになる。

$$f_{\text{int}}^e = \mathbf{B}^T (A_L \sigma_L + A_N \sigma_N) \quad (4.5.16)$$

CST 要素に関する内部つりあい条件式(4.5.11)は次式のようになる。

$$\mathbf{P}^T \sigma_L = \mathbf{P}^T \sigma_N \quad (4.5.17)$$



応力が区分的に一定であるという事実のため、 $L$  と  $N$  の間の境界における表面力連続条件は不連続面上の各点で成立している。

#### 4.5.3 Kinematically optimal symmetric 定式化

##### 4.5.3.a 局所帯を有する要素

前節と異なり、次式の拡張変位内挿行列を使用する。

$$N_c = \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & N_c \end{bmatrix} \quad (4.5.18)$$

上式の  $N_c(\mathbf{x})$  は次式のような標準的でない形状関数である。

$$N_c(\mathbf{x}) = H_L(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^N H_L(\mathbf{x}_i) N_i(\mathbf{x}) \quad (4.5.19)$$

ここで  $N$  は要素 1 つ当りの節点の数であり、 $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は通常形状関数であり、 $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) は節点座標ベクトル、そして  $H_L$  は  $N_-$  において  $H_L = 0$  の一、定値とされる、 $N_+$  において  $H_L = 1$  の一定値となり、また  $L$  内において 0 から 1 へ線形的に変化すると仮定する ramp 関数である。関数  $H_L$  は変位内挿関数の拡張であり、総和項  $\sum H_L(\mathbf{x}_i) N_i(\mathbf{x})$  は通常形状関数の単なる線形結合である。この総和項は、各節点において非標準的な形状関数  $N_c$  の値をゼロする。実際に  $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$  (=Kronecker のデルタ) を考慮すると、次式を得る。

$$N_c(\mathbf{x}_j) = H_L(\mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N H_L(\mathbf{x}_i) N_i(\mathbf{x}_j) = H_L(\mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N H_L(\mathbf{x}_i) \delta_{ij} = 0 \quad (4.5.20)$$

拡張変位内挿行列にひずみ-変位演算子を適用すると、次式の拡張ひずみ内挿行列を得る。

$$B_c = \begin{bmatrix} H_{L,x} & 0 \\ 0 & H_{L,y} \\ H_{L,y} & H_{L,x} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^N H_L(x_i) \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.5.21)$$

ここで、カンマの後の下付き添字は、 $H_{L,x} \equiv \partial H_L / \partial x$  のような偏微分を表す。もし座標系が局所帯に沿って配置されているなら、 $H_{L,x} = \chi_L / k$  そして  $H_{L,y} = 0$  となる。アイソパラメトリック有限要素の場合は、各節点の行列は次式のようなになる。

$$B_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (4.5.22)$$

上式は次式の通常のひずみ内挿行列の部分行列である。

$$B = [B_1, B_2, \dots, B_N] \quad (4.5.23)$$

それ故に、式(4.5.21)の拡張ひずみ内挿行列は次式のような簡潔な形式で表現出来る。

$$B_c = \frac{1}{k} \chi_L P - B H_L \quad (4.5.24)$$

ここで、 $P$  は式(4.5.2)によって定義される行列であり、

$$H_L = \begin{bmatrix} H_L(x_1) & 0 \\ 0 & H_L(x_1) \\ \vdots & \vdots \\ H_L(x_N) & 0 \\ 0 & H_L(x_N) \end{bmatrix} \quad (4.5.25)$$

である。

内力に関する公式(4.5.7)は有効なままであるが、今の場合、応力  $\sigma_L$  は次式のひずみより

求められる.

$$\varepsilon_L = B d + \left(\frac{1}{k} P - B H_L\right) e = B(d - H_L e) + \frac{1}{k} P e = B d_N + \frac{1}{k} P e \quad (4.5.26)$$

ここで,  $d_N = d - H_L e$  である, そして応力  $\sigma_N$  は次式のひずみより計算される.

$$\varepsilon_N = B d - B H_L e = B(d - H_L e) = B d_N \quad (4.5.27)$$

$$d_N = d - H_L e \quad (4.5.28)$$

である.

この場合,  $G = B_c$  であるから, 内部つりあい条件式(4.4.6)は次式のようにになる.

$$\int_{A_L} \left(\frac{1}{k} P - B H_L\right)^T \sigma_L dA - \int_{A_N} (B H_L)^T \sigma_N dA = 0 \quad (4.5.29)$$

上式は以下のように変形出来,

$$H_L^T \left( \int_{A_L} B^T \sigma_L dA + \int_{A_N} B^T \sigma_N dA \right) = \frac{1}{k} \int_{A_L} P^T \sigma_L dA \quad (4.5.30)$$

左辺丸括弧内の表現は式(4.5.7)の内力ベクトルに等しい. 上式左辺の  $H_L^T$  を掛けてある項は  $N_+$  に位置する節点に作用する内力の総和と局所帯  $L$  において生じる節点の重み付けされた寄与を加えた内力の総和に等しい. 式(4.5.30)は以下のようにも記述出来る.

$$H_L^T f_{\text{int}}^e = \frac{l}{A_L} \int_{A_L} P^T \sigma_L dA \quad (4.5.31)$$

上式は次のような物理的解釈を与える. つまり局所帯における応力成分  $\sigma_x$  と  $\tau_{xy}$  の平均値に局所帯の長さ  $l$  を掛けたものは, 局所帯の '正' の側に作用する内力の総和に等しいということである.

#### 4.5.3.b 不連続線を有する要素

$k \rightarrow 0$  の極限において, 内力は式(4.5.14)によって与えられるので, 結局, 弱応力連続条

件式(4.5.31)は次式のようになる.

$$\mathbf{H}_L^T \mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{S_L} \mathbf{t} dS \quad (4.5.32)$$

上式は, 局所帯の‘正’の側に作用する内力の総和は結合表面力を不連続線に沿って積分したものに等しいことを意味する. 言い換えると, 不連続線に沿って要素を切り, 分離した部分の内力の総和を, 相互作用を結合表面力に置き換えると, 要素の分離した部分のどちらも力のつりあいを満たさなければならない (しかしモーメントのつりあい条件は必要ではない).

#### 4.5.4 Statically and kinematically optimal nonsymmetric 定式化

式(4.5.24)による拡張ひずみ内挿行列  $\mathbf{B}_e$  を用いるが内部つりあい条件式(4.4.6)において式(4.5.1)の行列  $\mathbf{G}$  の転置を用いると, Klisinski ら<sup>11)</sup>の SKON となる. 従って, 応力  $\sigma_L$  と  $\sigma_N$  は, Lotfi と Shing<sup>12)</sup>による要素と同様に, 式(4.5.26)と式(4.5.27)によって与えられる  $\varepsilon_L$  と  $\varepsilon_N$  によって計算されるが, 応力連続条件式(4.5.11)と(4.5.15)は Belytschko らによる手法によるアプローチが取られる.

不連続線を有する CST の SKON 定式化は簡単な物理的考慮に基づく Olofsson ら<sup>20)</sup>によって構成された要素となる. 彼らは節点変位を要素の一樣なひずみによる部分とき裂の開口による部分に分けた. 本節では, これらの部分はそれぞれ

$\mathbf{d}_N$  と  $\mathbf{H}_L \mathbf{e}$  に相当する. Olofsson らは線形弾性則を用いてひずみ  $\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}_N$  を応力  $\sigma$  と関係付け, 不連続面では塑性体の境界面モデルを用いてき裂の開口  $\mathbf{e}$  を結合表面力  $\mathbf{t}$  と関係付けている. そして, 最終的に, 自然な表面力連続性の要請  $\mathbf{t} = \mathbf{P}^T \sigma$  を課し, 内力は  $\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \mathbf{A}_e \mathbf{B}^T \sigma$  によって求められる.

SOS と KOS 定式化の利点を組み合わせた要素の最初の報告は四辺形要素を用いた Dvorkin ら<sup>10)</sup>によって発表されている. 任意の種類の親要素に関する SKON 定式化の一般的なものは Simo と Oliver によって提案されている. CSTに関するそれらの手法は Olofsson ら<sup>20)</sup>によるものと厳密に同じ要素になっている. またその一般的な手法は Armero と Garikipati<sup>14)</sup>によって混合三角形要素へ応用されている.

#### 4.6 各手法の比較検討

3 つの基本的な定式化の説明を行ってのので, 過去の文献からそれらのモデルを分類する. 個々のモデルの違いにより多くの方法がある. 例えば, 要素の種類, 不連続性の種類 (弱

／強), 構成則等である. 分類化のひとつの主要な方法は運動学的拡張の種類と内部つりあい条件の種類で分類する方法である.

1つの弱不連続線のみが1つの要素内を横切ることの出来る Ortiz ら<sup>4)</sup>のモデルにおいて, 局所帯の幅は要素の大きさに依存する. Belytschko ら<sup>9)</sup>は1つの要素内に2つの平行な弱不連続線を許し, ひとつの要素は局所帯を含むことが出来る. 彼らは局所帯が組み込まれた要素を最初に開発し, それは本節で SOS と呼んでいる定式化に基づいている. 最近, この定式化は多くの研究者によって3角形定ひずみ要素に応用されている. KOS 定式化として Lotfi と Shing が挙げられる<sup>12)</sup>. この手法を使用している報告は, 内部つりあい条件式の扱いにくいため, 殆ど無い.

要素の任意の種類に適用出来る SKON 定式化の一般的な方法は Simo と Oliver<sup>2D)</sup>により, 短い論文において提案されており, その後, Oliver<sup>16), 17)</sup>によって活発に研究されている. CST 要素に関しては, 彼らの提案は Oloffson ら<sup>20)</sup>によるものと厳密に同じ運動学的方程式と静的方程式になっている.

#### 4.6.1 運動学的方程式

対称な剛性方程式を持つ定式化の間の違いは, 強不連続線を持つ3角形定ひずみ要素を詳細に考察することによって簡潔に説明出来る. 簡単化のため, 物体が線形弾性体であり, 全ての非線形過程は不連続線において生じると仮定する. 標準的な変位内挿関数は一定ひずみ  $\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{d}$  となる. 不連続性の存在のため, ひずみの1部はき裂の開口とすべりによって緩和される. SOS 定式化では, 標準的なひずみから始まり, 不連続線に垂直なひずみ成分とせん断成分が緩和する. 一方 KOS 定式化は最初に節点変位から変位ジャンプの寄与が引かれ, 運動学的演算子 (kinematic operator) のみが適用される. 前者の手法では, 一般に, 大きく開いたき裂の周りの応力緩和を十分に再現出来ない. 以上の事を簡単な例で説明するため, 不連続線の1辺 ( $N_-$  内) において  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  と不連続線のもう1辺 ( $N_+$  内) において  $\mathbf{u} = \mathbf{e} = \{e_n, e_s\}$  によって定義される変位場を考慮する. (図 4.2 参照) 節点1と2が  $N_-$  内にありそして節点3が  $N_+$  内にあるような不連続線によって横切られるある三角形要素を仮定する. SOS 定式化では, 次式のひずみ内挿関数となる.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{1}{h} \mathbf{P}\mathbf{e} = \frac{1}{2A_e} \begin{Bmatrix} (y_1 - y_2)e_n \\ (x_2 - x_1)e_s \\ (x_2 - x_1)e_n + (y_1 - y_2)e_s \end{Bmatrix} - \frac{l}{A_e} \begin{Bmatrix} e_n \\ 0 \\ e_s \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2A_e} \begin{Bmatrix} (y_1 - y_2 - 2l)e_n \\ (x_2 - x_1)e_s \\ (x_2 - x_1)e_n + (y_1 - y_2 - 2l)e_s \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

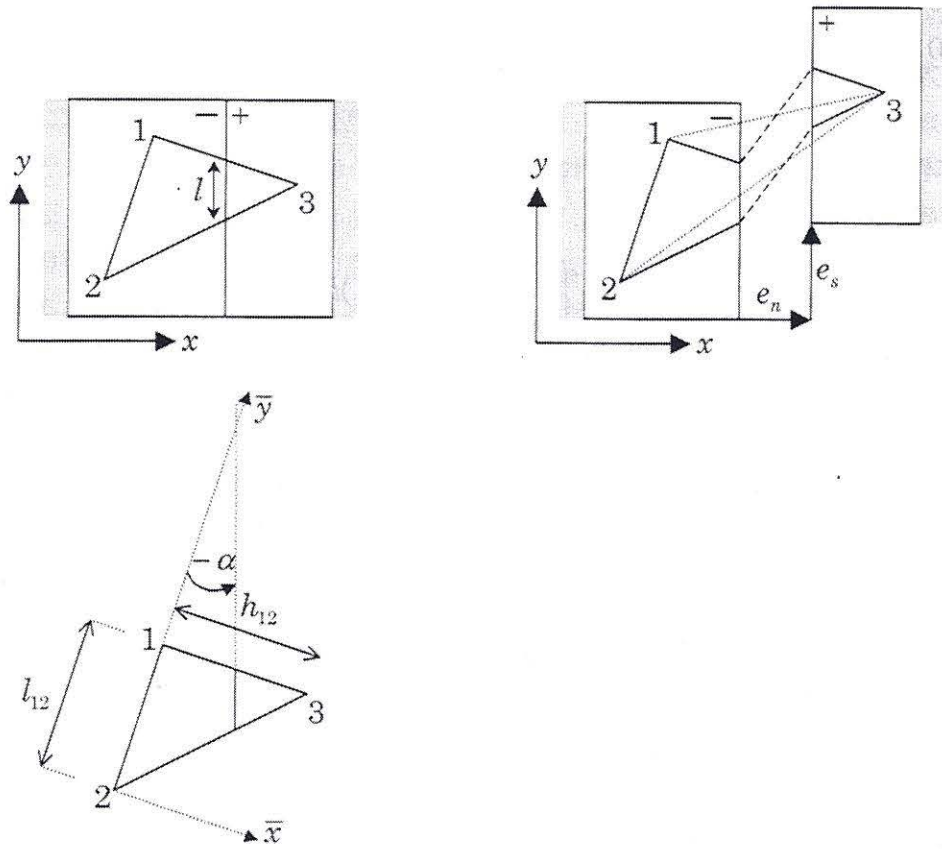


図 4.2 き裂を持つ要素

$x_1 = x_2$  と  $y_1 - y_2 = 2l$  の場合のみ、即ち現在考慮している要素に関して要素辺 1-2 が不連続線に平行であり、そして不連続線の交点の 2 倍の長さの場合のみ全ひずみ成分がゼロになる。その他全ての状況においては、ひずみ成分のいくつかはゼロとならず、不連続面上で物理的意味のない応力を生じさせる。

応力ロッキングが生じる SOS 定式化と比較して、KOS 定式化は節点変位からき裂の開口成分  $e_n$  と  $e_s$  を引いており、結局ゼロの節点変位  $\mathbf{d}_N = \mathbf{d} - \mathbf{H}_L \mathbf{e}$  を与え、その結果として不連続部分において、ゼロのひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}_N$  を与える。したがって、物理的意味のない応力は発生しない。

更なる考察をするため、我々は KOS 定式化の運動学的方程式を次式のように書き直す。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{d} - \mathbf{H}_L \mathbf{e}) = \mathbf{B} \mathbf{d} - \mathbf{B} \mathbf{H}_L \mathbf{e} \quad (4.6.2)$$

もし節点 3 が孤立節点であるなら、次式を得る。

$$\mathbf{H}_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (4.6.3)$$

そして次式を得る.

$$\mathbf{B}\mathbf{H}_L = \mathbf{B}_3 = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_2 - x_1 \\ x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \frac{l_{12}}{2A_e} \begin{bmatrix} (y_1 - y_2)l_{12} & 0 \\ 0 & (x_2 - x_1)l_{12} \\ (x_2 - x_1)l_{12} & (y_1 - y_2)l_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6.4)$$

ここで  $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  は (孤立節点と反対側の) 節点 1 と 2 を結ぶ要素辺の長さである.  $h_{12} = 2A_e / l_{12}$  はこの要素辺から孤立節点までの距離であり,  $\cos \alpha = (y_1 - y_2) / l_{12}$  と  $\sin \alpha = (x_2 - x_1) / l_{12}$  はこの要素辺の単位法線ベクトルの成分であり,  $\alpha$  はこの要素辺と不連続線の間のなす角である.

孤立節点の反対側の要素辺が不連続線に平行であるならば,  $h_{12} = h$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = 0$ , その時, 式(4.6.4)は次式となる.

$$\mathbf{B}\mathbf{H}_L = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \mathbf{P} \quad (4.6.5)$$

これはこの特別な場合において KOS と SOS の運動学的方程式は等価であることを意味している. 一般的な場合において,  $\mathbf{B}\mathbf{H}_L$  は孤立節点の反対側の要素辺に配置されている座標系  $(\bar{x}, \bar{y})$  において式(4.6.5)の形となる. もちろん, そのような座標系において  $\mathbf{e}$  の成分は開口やすべりを意味しないが, 単純な座標系の回転によって, 開口やすべりの物理的な成分に変換出来る. 座標系  $(x, y)$  を  $\alpha$  だけ回転した座標系を用いた時, SOS 定式化によって緩和される  $\varepsilon_{xx}$  と  $\gamma_{xy}$  の成分の代わりに, KOS 定式化はひずみ成分  $\varepsilon_{\bar{x}\bar{x}}$  と  $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}$  を緩和すること

とは重要なポイントである. 孤立節点と反対側の相対変位によって  $\varepsilon_{\bar{y}\bar{y}}$  は影響されないで, 完全なひずみ緩和は KOS 定式化において可能であり, 応力ロッキングは生じない.

#### 4.6.2 静的方程式

前節の議論より，KOS 定式化は運動学的観点からは明らかに優れている．今，静的な見方，特に内部つりあい条件に着目する．3 角形定ひずみ要素に関して，SOS 定式化は局所帯の境界において，自然な表面力連続条件を与える．他方 KOS 定式化は不連続線に沿った表面力はその帯の長さによって割られた孤立節点における節点力に等しい条件を与えるので，自然な表面力連続条件は満たされない．結果として，応力によって記述された局所化開始に関する規準は不連続線の表面力を使用した場合と，同じ規準であるべき要素内の応力を使用した場合と異なった規準になってしまう．例えば，もし応力空間における Rankine 規準を使用するならば，局所化開始時における垂直な表面力が引張強度に等しくそしてせん断表面力がゼロとなる場合であるが，これは自然に，KOS 定式化の場合，分布節点力を使用した場合と異なった結果を与えることになる．今，物体が  $\sigma_x = f_t = \text{引張強度}$ ， $\sigma_y < f_t$ ，

$\tau_{xy} = 0$  の状態にあると仮定する．孤立節点 3 における節点力は次式のように計算される．

$$F_{3x} = A_e \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)\sigma_x + (x_1 - x_2)\tau_{xy}] = \frac{y_1 - y_2}{2} f_t \quad (4.6.6)$$

$$F_{3y} = A_e \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)\tau_{xy} + (x_1 - x_2)\sigma_y] = \frac{x_1 - x_2}{2} \sigma_y \quad (4.6.7)$$

したがって，不連続面上の表面力  $t_n$ ， $t_s$  は次式となる．

$$t_n = \frac{F_{3x}}{l} = \frac{y_1 - y_2}{2l} f_t \quad (4.6.8)$$

$$t_s = \frac{F_{3y}}{l} = \frac{x_2 - x_1}{2l} \sigma_y \quad (4.6.9)$$

上式は，特別な場合を除き，実際の表面力  $t_n = f_t$ ， $t_s = 0$  とは異なっている．表面力連続条件は  $l = (y_1 - y_2)/2$  および  $x_1 = x_2$  の特別な場合においての満たされる．これらは SOS 定式化がロッキングを避けるために必要な条件と同等である．

#### 4.6.3 考察

変位又はひずみの不連続に相当する付加的な項によって通常の有限要素内挿関数を拡張



する多くの手法を統一された枠組み内で紹介し、そして Jirásek の分類化を用いて評価を行った。これらのモデルには 3 つの主要な分類が存在し、それらはここで、SOS, KOS, SKON と呼ばれることが示されている。SOS 定式化は完全に開いた不連続面の運動学を正確に反映出来ないがそれは自然な表面力連続条件を与える、一方 KOS 定式化は運動学的条件を正しく表現しているが、要素内の応力と不連続線を横切る表面力との連続条件を一般には満たさない。

対称定式化のこれらの欠点により、非対称 SKON 定式化の研究が活発に行われるようになった。非対称 SKON 定式化は、静的方程式と運動学的方程式の両方を満たし、極めて自然な表面力連続条件を与えそして何の応力ロッキング効果なしに破壊過程の最終段階において不連続面の変形を正確に表現出来る。しかしその代償として、接線剛性行列の対称性が消失してしまう。いくつかの文献に報告されている結果は、SKON モデルが局所化したき裂やせん断帯の生成を数値解析において上手く表現できることを示している。また SKON 定式化は局所化帯の‘長さ’を明確に示すことを何ら要求しないことに注意したい。この事は、局所帯の長さは考えられた要素内のどの位置に不連続面が生じるかによって異なる量である事から、非常に重要な長所となる。

## 5. 強不連続解析の具体的な定式化

### 5.1 基礎理論 <sup>1)</sup>

本章では、第4章で行われた分類化において、ひずみの局所化からき裂（変位の不連続）の発生に至る一連の破壊現象を上手く表現出来る SKON 定式化に含まれる Oliver の手法を用いて、強不連続解析の具体的な定式化を行う。

#### 5.1.1 不連続変位場

不連続面  $S$  に沿って強不連続を表す物体  $\Omega$  を考える。また不連続面  $S$  は物質曲面であるとし、その法線を  $\mathbf{n}$  とする（図 5.1 参照）。

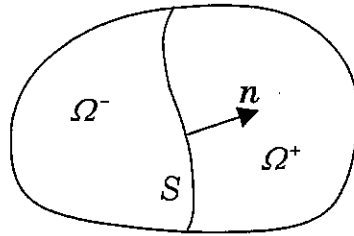


図 5.1 不連続面  $S$  を有する物体  $\Omega$

以後の定式化のため、物体は不連続面  $S$  によって2つの部分  $\Omega^+$  と  $\Omega^-$  に分けられると仮定する（ $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$ ,  $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$ ）。そのとき物体  $\Omega$  上に分布する Heaviside の単位関数  $H_S(\mathbf{x})$  を次式のように定義する。

$$\begin{cases} H_S(\mathbf{x}) = 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ H_S(\mathbf{x}) = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (5.1.1)$$

ここで  $\mathbf{x}$  は粒子の物質座標である。そして不連続面  $S$  上で強不連続を現す変位場の最も一般的な表現は次式で与えられる（図 5.2 参照）。

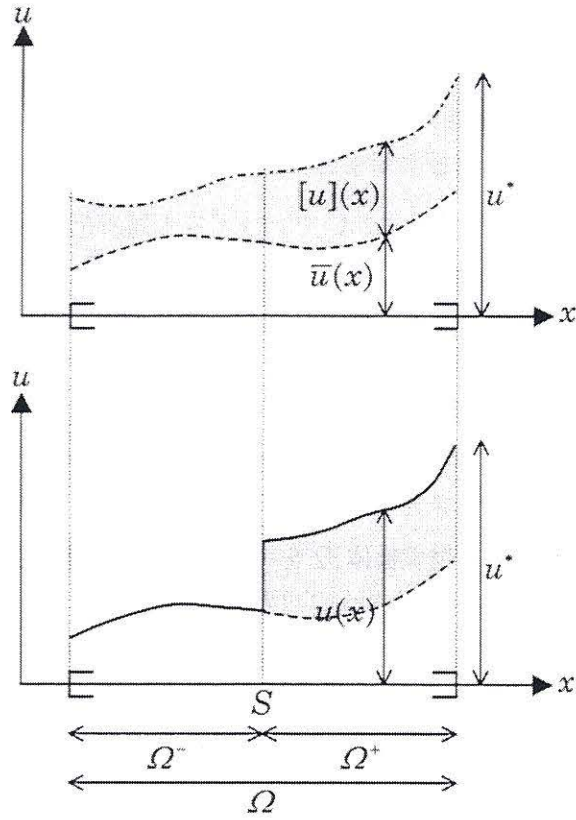


図 5.2 1次元の場合の変位場の分解

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S(\mathbf{x})[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \quad (5.1.2)$$

ここで、 $t$  は時刻、 $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  は変位場の連続部分、そして  $[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t)$  は物体の全ての位置で連続であり、変位ジャンプを表す関数である。式(5.1.2)より、変位場  $\mathbf{u}$  の変位ジャンプ  $[\mathbf{u}]_S$  は不連続面  $S$  上に現れ、次式で与えられる。

$$[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in S} = [\mathbf{u}]_S \quad (5.1.3)$$

次に式(5.1.2)で示される変位場に対し、微小変形論に基づき変位勾配の対称部分を計算するとひずみ場が得られ、それは次式のように誘導される。

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= (\nabla \mathbf{u})^S \\
&= \underbrace{(\nabla \bar{\mathbf{u}})^S + (H_S \nabla [\mathbf{u}])^S}_{=\bar{\varepsilon}} + (\nabla H_S \otimes [\mathbf{u}])^S \\
&= \bar{\varepsilon} + \delta_S([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^S
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

ここで上付き添字  $(\cdot)^S$  は  $(\cdot)$  の対称部分を意味し，そして  $\delta_S$  は不連続面  $S$  に沿った Dirac のデルタ関数であり，次式を満たす．

$$\int_{\Omega} \delta_S \omega_0 d\Omega = \int_S \omega_0 d\Gamma \quad \forall \omega_0 \in C_0^\infty(\Omega) \tag{5.1.5}$$

ここで  $(\nabla \bar{\mathbf{u}})^S$  と  $(H_S \nabla [\mathbf{u}])^S$  は  $\bar{\varepsilon}$  にまとめられ，それはひずみ場の連続部分を表し，不連続面  $S$  を横切り，有界である． $\delta_S([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^S$  の非有界性は式(5.1.2)に現れる Heaviside の単位関数  $H_S(\mathbf{x})$  の勾配によって生じる．

### 5.1.2 強不連続解析の仮定

強不連続解析は任意の一般的な構成式に適用される．本節の目的は，そのような構成式が強不連続の発生，そして式(5.1.4)で示される非有界項を含むひずみ場に適合するような重要な性質上の特徴を調べることである．この目的により，構成式によって与えられる応力場に以下に示される仮定が課せられる．

#### I. 応力の有界性

物体  $\Omega$  の全ての位置で応力は有界である．

#### II. 不連続面上での表面力の連続性

解析の任意の時刻において，不連続面  $S$  上での不連続面  $S$  を横切る表面力は連続である．

#### III. 不連続面の法線方向の決定

不連続面  $S$  上の任意の点の法線  $\mathbf{n}$  は，現時刻の応力場によって与えられる．

仮定 I は，(式(5.1.4)によってひずみ場が非有界となる不連続面  $S$  上においてさえも) 非

有界となる応力場には物理的意味がないことを意味している。仮定Ⅱは、不連続面  $S$  を横切るつり合い条件、物理的な表現をすれば、物体内の力のつり合い法則である。仮定Ⅲは、新たに生じる不連続面  $S$  の法線方向  $\mathbf{n}$  は、その点が不連続化する現時刻の応力場によって与えられることを意味する。

### 5.1.3 等方損傷モデル

本節では、本論文解析に用いる構成式の説明を行う。まず次式で定義される構成式を考える。

$$\Psi = (1-d)\Psi^e, \quad \Psi^e = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot C \varepsilon \quad (5.1.6)$$

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = (1-d)C\varepsilon \quad (5.1.7)$$

ここで、 $\Psi$  は Helmholtz の自由エネルギー、 $\Psi^e$  は超弾性体のひずみエネルギー、 $C$  は弾性構成テンソル、 $\sigma$  は応力テンソル、そして  $d$  は損傷変数と呼ばれるスカラー変数であり、 $0 \leq d \leq 1$  とする。ここでは、時刻  $t$  における損傷変数は、次式の様に与える：

$$d_t = G(r_t) = \max_{s \in (-\infty, t)} \{r_1, \tau_s^e\} \quad (5.1.8)$$

ここで  $\tau^e$  はひずみのノルムであり、 $r_1$  は不連続を開始する時刻の値であり、 $G(\cdot)$  は単調増加スカラー関数であり、 $G(r_1) = 0$ 、 $G(\infty) \leq 1$ 、そして  $G'(\mu) \geq 0$ 、 $\forall \mu \in [r_1, \infty)$  である。変数  $r_t$  は、ひずみ空間の弾性領域  $E_\varepsilon$  の時刻  $t$  における大きさを表し、次式で与えられる。

$$E_\varepsilon := \{\varepsilon \mid \tau^e \leq r_t\} \quad (5.1.9)$$

このような条件の下においては、 $d$  と  $r$  が共に時刻  $t$  に関して常に増加することが分かる。したがって、

$$\dot{d} \geq 0, \quad \dot{r} \geq 0 \quad (5.1.10)$$

となる。

ここで  $\dot{d} = 0$  は弾性载荷，弾性除荷に対応し， $\dot{d} > 0$  は非弾性载荷に対応する。

結局，式(5.1.6)と式(5.1.7)より，散逸は次式の様に求められる。

$$D = -\dot{\Psi} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon} = \dot{d} \Psi_0 \geq 0 \quad (5.1.11)$$

式(5.1.8)に現れる関数  $G(\cdot)$  とノルム  $\tau^\varepsilon$  を特定することにより，いくつかの異なる挙動をモデル化出来る。ここでは簡単化のため，圧縮と引張において対称な挙動を表し，線形ひずみ硬化－軟化則を用いると， $d$  は次式で定義される。

$$\tau^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon \cdot C \varepsilon} \quad (5.1.12)$$

$$d = G(r) = \begin{cases} 0 & r < r_1 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \\ \frac{1}{1+H} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right) & r_1 < r < r_2 = -\frac{1}{H} r_1 \\ 1 & r_2 < r \end{cases} \quad (5.1.13)$$

ここで式(5.1.13)において， $H$  は軟化パラメータと呼ばれるものであり， $\sigma_u$  は単軸の場合の最大引張応力であり， $E$  は弾性係数である。単軸の場合の応力－ひずみ関係とそれに対応する  $d-r$  関係が図 5.3 に示されている。

式(5.1.7)と式(5.1.12)より，応力を用いた新しいノルム  $\tau^\sigma$  は，次式の様に定義出来る。

$$\tau^\sigma = \sqrt{\sigma \cdot C^{-1} \sigma} = (1-d) \sqrt{\varepsilon \cdot C \varepsilon} = (1-d) \tau^\varepsilon \quad (5.1.14)$$

この解析には， $\tau^\varepsilon$  より  $\tau^\sigma$  が便利であるので，以下の構成式には  $\tau^\sigma$  を用いて表すことにする。

式(5.1.7)を時間微分することにより，増分関係の応力－ひずみ関係が次式のように得ら

れる。

$$\dot{\sigma} = C^{tg} \dot{\varepsilon} \quad (5.1.15)$$

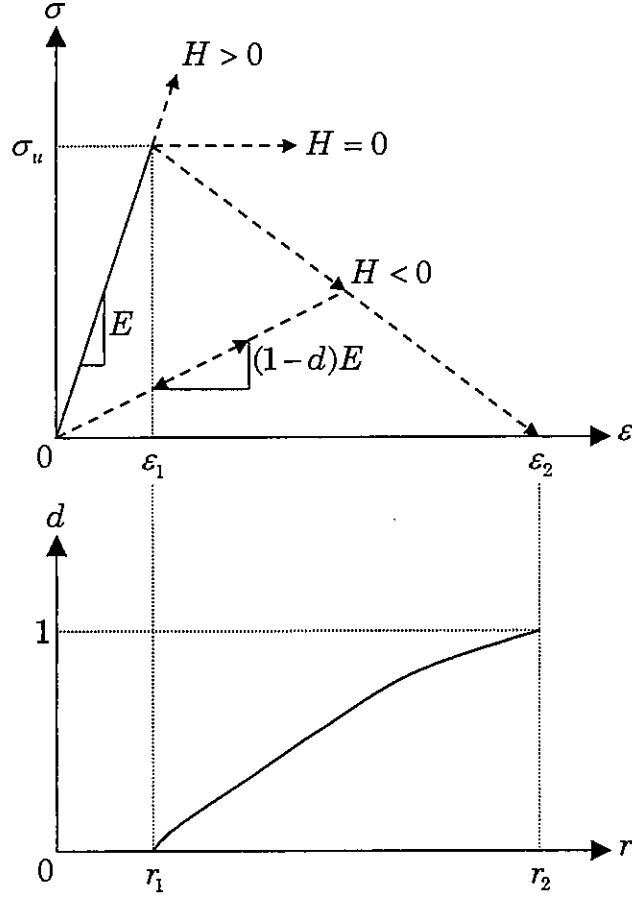


図 5.3 単軸の場合の応力-ひずみ関係とそれに対応する  $d-r$  関係

ここで  $C^{tg}$  は接線構成テンソルであり次式の様に与えられる。

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 \text{ (unloading)} & C^{tg} = (1-d)C \\ \dot{d} \neq 0 \text{ (loading)} & C^{tg} = (1-d) \left\{ C - \frac{1}{1+H} \frac{\tau_1}{(\tau^\sigma)^3} \sigma \otimes \sigma \right\} \end{cases} \quad (5.1.16)$$

最後に、散逸は次式の様に書き直すことが出来る。

$$D = \frac{1}{2}(\tau^\sigma)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d}{1-d} \right) \geq 0 \quad (5.1.17)$$

ここで  $d/(1-d)$  の項は，載荷条件の下，次式の様に表される．

$$\frac{d}{1-d} = \frac{1}{H} g \quad (5.1.18)$$

$$g(\sigma) = 1 - \frac{r_1}{\tau^\sigma(\sigma)} \quad (5.1.19)$$

ここで式(5.1.14)と式(5.1.19)から，もし応力が有界（かつゼロでない）なら，応力の関数  $g$  も有界である．軟化パラメータ  $H$  が負の値であるなら，ひずみ場がどのような値であっても（例え非有界な値であつてさへも）応力は有界な値となる（図 5.3 参照）．

#### 5.1.4 強不連続解析の特徴

この節では，前述の不連続変位場の導入，強不連続解析の 3 つの仮定，そして今回用いる等方損傷モデルの導入より，次章で述べる有限要素解析の基礎理論に組込む強不連続解析の特徴を検討する．

##### 5.1.4.a 応力の有界性

構成式(5.1.7)に式変形を行うと，次式が得られ，

$$\left(1 + \frac{d}{1-d}\right) \sigma = C \varepsilon \quad (5.1.20)$$

そして式(5.1.20)に，誘導された式(5.1.4)のひずみ場を代入すると，次式が得られる．



$$\underbrace{\sigma}_{\text{bounded}} + \frac{d}{1-d} \sigma = \underbrace{C\bar{\varepsilon}}_{\text{bounded}} + \underbrace{\delta_S C([u]_S \otimes n)^S}_{\text{unbounded}} \quad (5.1.21)$$

式(5.1.21)を調べると、応力を有限と仮定すれば、左辺の第1項は有限となり、また右辺の第1項は元々有限である（式(5.1.4)参照）。そして、ここでは、不連続変位場の存在を前提としているので、 $[u]_S \neq 0$ であり、式(5.1.21)の右辺第2項は非有界項となる。結局、式(5.1.21)が数学的に成立するには、右辺にもデルタ関数的非有界性持たなければならない。ここで唯一可能性があるのは $d/(1-d)$ の項であり、式(5.1.18)と式(5.1.19)で表される、 $d/(1-d)$ を考えると、応力の関数 $g$ は有界であるので、その可能性は

$$\frac{1}{H} = \underbrace{\delta_S \frac{1}{\bar{H}}}_{\text{unbounded}} + \underbrace{\frac{1}{H^*}}_{\text{regular}} \quad (5.1.22)$$

と考えることが出来る。ここで簡単化のため、 $1/H^* = 0$ の場合に制限する。（このように制限すると、解析の一般性は維持されるが、この問題に対し、特殊な制限を与えたことになる。）したがって、次式のように仮定する

$$\frac{1}{H} = \delta_S \frac{1}{\bar{H}} \quad (5.1.23)$$

式(5.1.23)は応力の有界性の要請の結果である。すなわち、軟化パラメータ $H$ の逆数は、 $1/\bar{H}$ の大きさを持つデルタ関数的特性を持っていることである。このことにより $\bar{H}$ は、固有な軟化パラメータと呼ばれる。

式(5.1.23)を式(5.1.18)へ代入し、それを式(5.1.21)へ代入して、整理すると、次式を得る。

$$\underbrace{[\sigma - C\bar{\varepsilon}]}_{=0 \text{ in } \Omega \setminus S} = \underbrace{\delta_S [C([u]_S \otimes n)^S - \frac{1}{\bar{H}} g \sigma]}_{=0 \text{ in } S} \quad (5.1.24)$$

式(5.1.24)が数学的に成立するためには、左辺と右辺がそれぞれ、物体の連続部分（ $\Omega \setminus S$ ）と不連続部分（ $S$ ）で消去されなければならない。故に、式(5.1.24)から応力場が以下のよ

うに得られる.

$$\sigma_{\Omega \setminus S} = C\bar{\varepsilon} \quad (5.1.25)$$

$$\sigma_S = \frac{\bar{H}}{g(\sigma_S)} C([u]_S \otimes \mathbf{n})^S \quad (5.1.26)$$

ここで式(5.1.25)は、ひずみ場の連続部分 $\bar{\varepsilon}$ によって、物体の連続部分における弾性挙動を示し、非弾性挙動については、簡単化された式(5.1.23)ではなく、式(5.1.22)を用いることも出来る. また、式(5.1.26)は不連続面上の非線形の応力-変位ジャンプ関係を与え、この式を使えば、変位ジャンプ $[u]_S$ と不連続面上の法線ベクトル $\mathbf{n}$ によって応力テンソルを決定することが出来る式となっている. したがって不連続面上の構成式として良く用いられる、表面力ベクトルと変位ジャンプの関係式ではない. その上、(応力の有界性の仮定から得られる)この不連続構成式は、5.3節で述べられる元の連続な構成式から求められたものである. 特に、式(5.1.26)は不連続面上の応力によって変位ジャンプを決定出来る. 単位ベクトル $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ からなる適当な正規直交基底 ( $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ ) を選ぶことにより、その正規直交基底に基づく $[u]_S$ と $\sigma_S$ の成分は、次式のように関係付けられる.

$$\begin{Bmatrix} [u]_n \\ [u]_p \\ [u]_q \end{Bmatrix}_S = \frac{g_S}{\bar{H}} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{np} \\ \sigma_{nq} \end{Bmatrix}_S \quad (5.1.27)$$

$$\sigma_{pp\varphi} = \sigma_{qq\varphi} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{nn\varphi}, \quad \sigma_{pq\varphi} = 0 \quad (5.1.28)$$

式(5.1.27)に $g_S = g(\sigma_S)$ が現れることにより、一般的に、変位ジャンプと表面力ベクトル $\sigma_S \mathbf{n} = \{\sigma_{nn}, \sigma_{np}, \sigma_{nq}\}^T$ の関係は線形ではなくなり、応力テンソルの全成分が、求められた変位ジャンプに関係していることが分かる.

また式(5.1.21)は、物質が弾性状態 ( $d = 0$ ) にあるときには、変位ジャンプが現れないことを意味する. 実際に、この状態では、式(5.1.21)は次式のようになり、

$$\underbrace{\underline{\sigma}}_{\text{bounded}} = \underbrace{\underline{C}\bar{\varepsilon}}_{\text{bounded}} + \underbrace{\delta_S C([\underline{u}]_S \otimes \underline{n})^S}_{\text{unbounded}} \quad (5.1.29)$$

応力の有界性の要請から、式(5.1.29)の非有界項が消去されなければならない事から、即ち  $[\underline{u}]_S = \mathbf{0}$  となる。

さらに、不連続面上の応力-変位ジャンプの関係式(5.1.26)を得るための誘導は、以下に示すように逆から辿ることも可能である。式(5.1.23)に示されるような軟化パラメータの超関数的性質が仮定され（それは、結果として物体の連続部分  $(\Omega \setminus S)$  に式(5.1.25)で定義されるような弾性挙動を考慮することになる。）、その時、不連続面  $S$  上の構成式の挙動にひずみ軟化 ( $\bar{H} < 0$ ) を考慮するならば、応力は  $\Omega \setminus S$  と  $S$  の両方で有界となる。したがって式(5.1.24)に矛盾することなく、式(5.1.7)の一般的な構成式を課すことにより式(5.1.26)は自動的に満たされる。この事により、今考えているある特定の構成式に対して、(時には求めることが困難である) 式(5.1.26)の不連続構成式を陽に課すことを避けることが出来る。この事は、この問題の数値解析に非常に有用な事である。

#### 5.1.4.b 不連続面上での表面力の連続性

式(5.1.26)を用いて変位ジャンプによって応力場が与えられるので、次は変位ジャンプ自体を求める。その変位ジャンプ自体を求めるために必要な方程式は、不連続面  $S$  近傍の物体の連続部分  $\Omega \setminus S$  における表面力ベクトルと不連続面  $S$  上の表面力ベクトルが等しいということから得られる。即ち、

$$\sigma_{\Omega \setminus S} \big|_{\underline{x} \in S} \underline{n} = \sigma_S \underline{n} \quad (5.1.30)$$

であり、上式に式(5.1.25)と式(5.1.26)を代入し、整理すると、

$$(\underline{C}\bar{\varepsilon})\underline{n} = \left\{ \frac{\bar{H}}{g_S} C([\underline{u}]_S \otimes \underline{n})^S \right\} \underline{n} = \frac{\bar{H}}{g_S} \underline{n} \cdot \underline{C} \cdot \underline{n} \cdot [\underline{u}]_S \quad (5.1.31)$$

となり、式(5.1.31)を変位ジャンプについて解くと次式が得られる。

$$[u]_S = \frac{g(\sigma_S([u]_S, n))}{\bar{H}} Q^{e-1} \cdot (C \bar{\varepsilon}_S) n \quad (5.1.32)$$

ここで、 $Q^e = n \cdot C \cdot n$  は弾性音響テンソルである。また式(5.1.32)は、その誘導に式(5.1.2.6)を用いており、ひずみ場の連続部分  $\bar{\varepsilon}_S$  と法線ベクトル  $n$  によって変位ジャンプを与える式である。ここで式(5.1.32)は、用いる構成式に依存するものであるが、前述のように数値解析には、必要のないものである。ここで重要なのは、不連続面上の表面力の連続性の要請式(5.1.30)が、変位ジャンプを決定する方程式を与えることであり、このことは後で述べる有限要素解析の定式化において用いられる。

#### 5.1.4.c 不連続面の法線方向の決定

不連続面  $S$  上の任意の点  $P$  を考え、 $t_1$  を点  $P$  において不連続化が開始する時刻とすると、その条件として次式が得られる。

$$\begin{aligned} [u]_S(x_P, t_1) &= [u]_S^1 = 0 \\ [\dot{u}]_S(x_P, t_1) &= [\dot{u}]_S^1 \neq 0 \end{aligned} \quad (5.1.33)$$

また式(5.1.26)は次式のように表すことも出来、

$$g_S \sigma_S = \bar{H} C ([u]_S \otimes n)^S \quad (5.1.34)$$

上式に時間微分を行うと、次式を得る。

$$\dot{g}_S \sigma_S + g_S \dot{\sigma}_S = \bar{H} C ([\dot{u}]_S \otimes n)^S \quad (5.1.35)$$

ここで、不連続面  $S$  は物質曲面であるという性質より ( $\dot{n} = 0$ ) と考えられる。式(5.1.35)は任意の時刻で成立し、特に不連続化を開始する時刻  $t_1$  においては、式(5.1.33)<sub>1</sub> より  $[u]_S^1 = 0$  となり、故に式(5.1.34)から  $g_S^1 = 0$  となるので、式(5.1.35)は次式の様になる。

$$\dot{g}_S^1 \sigma_S^1 = \overline{H} C([\dot{u}]_S^1 \otimes n)^S \quad (5.1.36)$$

他方，不連続化開始時刻において  $[u]_S^1 = 0$ ，そして  $g_S^1 = 0$  となるので， $\varepsilon_S = \bar{\varepsilon}_S^1$ ，そして  $d^1 = 0$  となり，結局次式を得る．

$$\sigma_S^1 = C \bar{\varepsilon}_S^1 \quad (5.1.37)$$

式(5.1.37)を式(5.1.36)へ代入すると，次式を得て，

$$C([\dot{u}]_S^1 \otimes n)^S = \frac{\dot{g}_S^1}{H} \sigma_S^1 = \frac{\dot{g}_S^1}{H} C \bar{\varepsilon}_S^1 \quad (5.1.38)$$

上式の両辺の前から  $C^{-1}$  を掛けると，次式を得る．

$$([\dot{u}]_S^1 \otimes n)^S = \frac{\dot{g}_S^1}{H} \bar{\varepsilon}_S^1 \quad (5.1.39)$$

式(5.1.39)は， $[\dot{u}]_S^1$  と  $n$  の両方を決定する方程式を与える．特に，法線ベクトル  $n$  は，式(5.1.39)の右边を利用することによって決定出来る．実際に，法線ベクトル  $n$  に直交する任意のベクトル  $t$  を式(5.1.39)の両辺に掛けると式(5.1.39)の左辺は次式のように消去され，

$$t \cdot \{([\dot{u}]_S^1 \otimes n)^S t\} = 0 = \frac{\dot{g}_S^1}{H} t \cdot \{\bar{\varepsilon}_S^1 t\} \quad (5.1.40)$$

次式を得る．

$$t \cdot \{\bar{\varepsilon}_S^1 t\} = 0 \quad \forall t \mid t \cdot n = 0 \quad (5.1.41)$$

ここで式(5.1.41)は，不連続化が開始する時刻のひずみ場の連続部分  $\bar{\varepsilon}_S^1$  によって不連続面  $S$  上の任意の点の法線ベクトルが決定出来ることを意味している．特に 2 次元の場合は，

法線ベクトルと接線ベクトルは，正規直交基底  $\hat{e}_1$  と  $\hat{e}_2$  を用いて次式の様に定義出来るので，

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \cos \theta \hat{e}_1 + \sin \theta \hat{e}_2 \\ \mathbf{t} &= -\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

式(5.1.42)を式(5.1.41)へ代入し，式変形を行うと，次式のような， $\theta$ に関する閉じた解を得て，これは法線方向に関する2つの解を示す．

$$\theta = \text{atan}\left[\frac{\bar{\varepsilon}_{12}^{-1} \pm \sqrt{\bar{\varepsilon}_{12}^{-1\,2} - \bar{\varepsilon}_{11}^{-1}\bar{\varepsilon}_{22}^{-1}}}{\bar{\varepsilon}_{11}^{-1}}\right]_S \quad (5.1.43)$$

法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を求めるもう一つの全く等価な方法が式(5.1.38)から得られる．式(5.1.38)の両辺に  $\bar{\varepsilon}_S^{-1}$  を掛け，式(5.1.37)を考慮すると，次式を得て，

$$\bar{\varepsilon}_S^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^1 = \sigma_S^1 \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^1 = \frac{\dot{g}_S^1}{H} \sigma_S^1 \cdot \mathbf{C}^{-1} \sigma_S^1 \quad (5.1.44)$$

上式より，次式が得られる．

$$\frac{\dot{g}_S^1}{H} = \frac{\sigma_S^1 \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^1}{\sigma_S^1 \cdot \mathbf{C}^{-1} \sigma_S^1} \quad (5.1.45)$$

今，式(5.1.38)の両辺に前から  $\mathbf{n}$  を掛けると，次式を得て，

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^1 = \frac{\dot{g}_S^1}{H} \mathbf{n} \cdot \sigma_S^1 \quad (5.1.46)$$

そして，式(5.1.45)を式(5.1.46)へ代入すると次式を得る．

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]_S^1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \sigma_S^1 \otimes \sigma_S^1 \cdot \mathbf{n}}{\sigma_S^1 \cdot \mathbf{C}^{-1} \sigma_S^1} [\dot{\mathbf{u}}]_S^1 = 0 \quad (5.1.47)$$

式(5.1.47)を次式のように書直すことが出来る．(式(5.1.14)参照)

$$\mathbf{Q}_S^{d^1}(\mathbf{n})[\dot{\mathbf{u}}]_S^1 = 0 \quad (5.1.48)$$

$$\mathbf{Q}_S^{d^1}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_S^{tg^1} \cdot \mathbf{n} \quad (5.1.49)$$

$$\mathbf{C}_S^{tg^1} = \mathbf{C} - \frac{\sigma_S^1 \otimes \sigma_S^1}{\sigma_S^1 \cdot \mathbf{C}^{-1} \sigma_S^1} = \mathbf{C} - \frac{\sigma_S^1 \otimes \sigma_S^1}{(\tau_{\sigma_S^1}^1)^2} \quad (5.1.50)$$

式(5.1.16)と比較して式(5.1.50)を調べると、 $\mathbf{C}_S^{tg^1}$ は、軟化パラメータ  $H = 0$ （もしくは、本質的な軟化パラメータ  $\bar{H} = 0$ ）の場合の不連続化開始時刻（ $d = 0$ ， $\tau_1 = \tau^\sigma$ ）の弾－損傷接線構成テンソルであると分かる．そして  $\mathbf{Q}_S^{d^1}$  は、 $H = 0$  の場合の不連続化開始時刻の弾－損傷音響テンソルである．式(5.1.48)における  $[\dot{\mathbf{u}}]_S^1 \neq 0$  の解の存在はその弾－損傷音響テンソルの特異性を意味し、即ち、次式が得られ、

$$\det[\mathbf{Q}_S^{d^1}(\mathbf{n})] = 0 \quad (5.1.51)$$

これは、 $\mathbf{n}$  について解くことが出来る．

ここで、法線ベクトルの決定に関するこの手順は、音響テンソルを用いた分岐解析に用いられるものと同様である．しかし、この強不連続解析において、現在考慮している音響テンソルは不連続化開始時刻と軟化パラメータに依存するものであることを述べておく．

#### 5.1.4.d 破壊エネルギー

運動エネルギーを無視した場合の消費される力より、時間  $[t_1, t_2]$  に物体に与えられる外力は、次式のように表現出来る．

$$\begin{aligned}
W_{\text{ext}}|_1^2 &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega \right] dt \\
&= \int_1^2 \left[ \int_{\Omega} (\dot{\Psi} + D) d\Omega \right] dt \\
&= \int_{\Omega} [(\Psi_2 - \Psi_1) + \int_1^2 D dt] d\Omega
\end{aligned} \tag{5.1.52}$$

ここで、 $\Psi$  は Helmholtz の自由エネルギー、 $D$  は散逸であり、式(5.1.6)、式(5.1.7)、そして式(5.1.17)～(5.1.19)により次式の様に表示される。

$$\Psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.1.53}$$

$$D = \frac{1}{2H} (\tau^\sigma)^2 \dot{g} = \frac{r_1}{2H} \dot{\tau}^\sigma = \delta_s \frac{r_1}{2H} \dot{\tau}_s^\sigma \tag{5.1.54}$$

次に、以下のような強不連続が発生する変形過程を考える。変形は時刻  $t_0 = 0$  に  $(\Psi_0, \tau_0^\sigma, d_0) = (0, 0, 0)$  で始まり、不連続開始時刻  $t_1$ 、 $(\Psi_1, \tau_1^\sigma, d_1) = (r_1^2/2, r_1, 0)$ 、に至るまで、応力は弾性的に増加し、最後に、単調増加する載荷過程 ( $\dot{d} \neq 0$ ) が、全ての応力が緩和する時刻  $t_2$ 、 $(\Psi_2, \tau_2^\sigma, d_2) = (0, 0, 1)$ 、まで続くものとする。式(5.1.52)と式(5.1.54)より、この変形過程の間に与えられる外力のなす仕事は次式の様に求められる。

$$\begin{aligned}
W_{\text{ext}}|_0^2 &= \int_{\Omega} \left[ \underbrace{(\Psi_2)}_{=0} - \underbrace{(\Psi_0)}_{=0} + \int_0^2 D dt \right] d\Omega \\
&= \int_1^2 \left[ \int_{\Omega} \delta_s \frac{r_1}{2H} \dot{\tau}_s^\sigma d\Omega \right] dt \\
&= \int_1^2 \left[ \int_S \frac{r_1}{2H} \dot{\tau}_s^\sigma d\Gamma \right] dt \\
&= \int_S \frac{r_1}{2H} \left[ \int_1^2 d\tau_s^\sigma \right] d\Gamma \\
&= \int_S \frac{r_1}{2H} \left[ \underbrace{\tau_2^\sigma}_{=0} - \underbrace{\tau_1^\sigma}_{=r_1} \right] d\Gamma \\
&= \int_S \frac{-r_1^2}{2H} d\Gamma
\end{aligned} \tag{5.1.55}$$



この式(5.1.55)の最後の被積分項は、不連続面の単位面積あたりに与えられるエネルギーに相当し、これは破壊エネルギー  $G_f$  と呼ばれるものであり、結局、

$$G_f = \frac{-r_1^2}{2\bar{H}} \quad (5.1.56)$$

となる。

式(5.1.13)<sub>1</sub>と式(5.1.56)を考慮すると、本質的な軟化パラメータ  $\bar{H}$  は次式の様に求められる。

$$\bar{H} = \frac{-r_1^2}{2G_f} = \frac{-\sigma_u^2}{2G_f E} \quad (5.1.57)$$

上式は、本質的な軟化パラメータ  $\bar{H}$  は、式(5.1.57)によって、破壊エネルギー  $G_f$ 、弾性係数  $E$ 、そして単軸の場合の最大引張応力  $\sigma_u$  と関係付けられる材料特性であることを意味している。 $\bar{H}$  は負の値であることも分かる。

## 5.2 有限要素定式化<sup>2)</sup>

本章では、変位の不連続を要素内部に組み込む手法として、前節に引き続き、Oliverにより提案されている Assumed Enhanced Strain method (AES) について述べる。AES は、強不連続解析の特徴を組み込んだ有限要素定式化である。

### 5.2.1 境界値問題

まず 5.1 節の冒頭で触れた境界値問題を、有限要素定式化のために整理する。物体境界  $\partial\Omega$  を持つ現在配置の物体  $\Omega$  を考える。ここで変位境界を  $\Gamma_u \subset \partial\Omega$  とし、応力境界を  $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$  とし、そして  $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$ 、 $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$  とする。これらは有限要素定式化に通常用いられる必要不可欠な仮定である。また物質曲面である不連続面  $S$  が物体を 2 つの部分  $\Omega^+$  と  $\Omega^-$  に分けられるとし、そして不連続面の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は  $\Omega^+$  側を向くものとする。そして物体境界外側向きの単位法線ベクトルを  $\mathbf{v}$  とする (図 5.4 参照)。

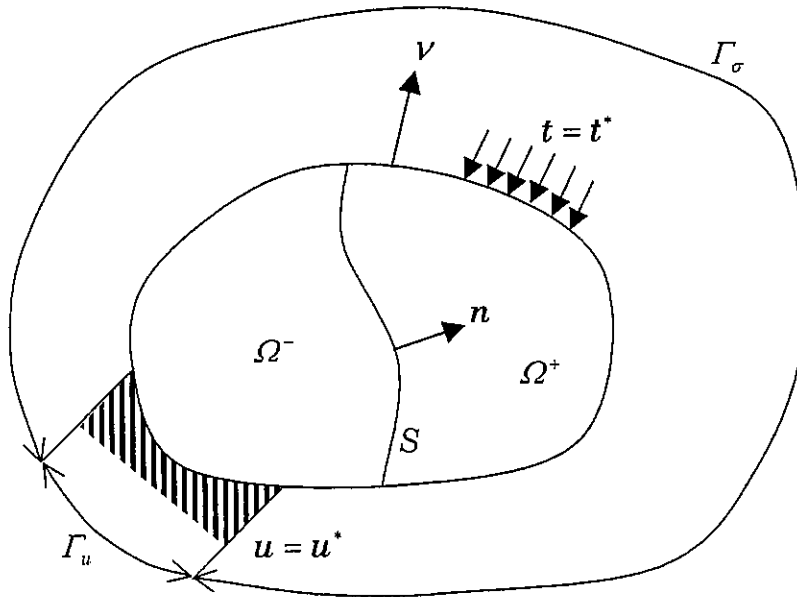


図 5.4 境界値問題

この時、境界値問題の支配方程式は以下のように表せる。

$$\operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus S \quad (5.2.1)$$

$$u = u^* \quad \text{in } \Gamma_u \quad (5.2.2)$$

$$\sigma \nu = t^* \quad \text{in } \Gamma_\sigma \quad (5.2.3)$$

$$\sigma^+ n = \sigma^- n \quad \text{in } S \quad (5.2.4)$$

$$\sigma_S n = \sigma^+ n (= \sigma^- n) \quad \text{in } S \quad (5.2.5)$$

式(5.2.1)は準静的問題のつり合い式であり、 $\sigma$ は応力、 $f$ は物体力である。式(5.2.2)と式(5.2.3)はそれぞれ、変位境界条件と荷重境界条件であり、 $u$ は変位場、 $u^*$ と $t^*$ はそれぞれ、与えられた変位と表面力である。式(5.2.4)と式(5.2.5)は不連続面を横切る表面力の連続性を意味する。式(5.2.4)は不連続面の両側の表面力（ $\sigma^+ n$ と $\sigma^- n$ ）の連続条件である。（ここで $\sigma^+$ と $\sigma^-$ はそれぞれ、 $\Omega^+$ と $\Omega^-$ の応力場を示す。）一方、式(5.2.5)は不連続面上の表面力（ $\sigma_S n$ ）（ $\sigma_S$ は不連続面上の応力場）と、不連続面の両側の表面力との連続条件である。式(5.2.1)～式(5.2.5.2)は古典的な境界値問題の場の方程式を表し、式(5.2.4)は弱不連続を考慮する時に含まれ、式(5.2.5)は強不連続を考慮する時に含まれる特別なものである。

これらの支配方程式に、応力 - ひずみ関係を与える構成式と運動学的方程式であるひずみ場が与えられる事により、境界値問題を解くための連立方程式が得られる。

## 5.2.2 不連続変位場の修正

5.1 節において強不連続を示す変位場を式(5.1.2)のように表現した。

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + H_S(x)[u](x, t) \quad (5.1.2 \text{ 再})$$

しかし, 図 5.2 を見れば分かるように, 式(5.1.2)の変位境界条件を変位の連続部分  $\bar{u}(\mathbf{x}, t)$  または変位ジャンプ  $[u](\mathbf{x}, t)$  のどちらか一方に課することは出来ない. このことは通常の有限要素定式化には不都合である. 従って変位場の不連続部分が物体のある局所領域にのみ存在するように変位場の修正を行う.

不連続面  $S$  を含む部分領域  $\Omega_h$  を考え,  $\Omega_h$  は不連続面  $S$  の右側と左側に任意の境界  $S_h^+$  と  $S_h^-$  を持ち, 不連続面  $S$  を含む  $\Omega_h$  を  $\Omega_h^+$  と  $\Omega_h^-$  の 2 つに分割する. 変位境界条件  $\Gamma_u$  は領域  $\Omega_h$  の外側にあると仮定する ( $\Gamma_u \cap \Omega_h = \emptyset$ ). そして以下の 2 つの条件を除いて, 完全に任意である連続関数  $\phi$  を次式のように定義する.

$$\begin{aligned}\phi^h(\mathbf{x}) &= 0, & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_h^- \\ \phi^h(\mathbf{x}) &= 1, & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_h^+\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

次に, ここで, 次式のような関数を定義する.

$$M_S^h(\mathbf{x}) = H_S(\mathbf{x}) - \phi^h(\mathbf{x})\tag{5.2.7}$$

領域  $\Omega_h$  以外の物体  $\Omega$  の全ての領域で,  $M_S^h(\mathbf{x})$  がゼロになることが容易に分かる. 式(5.2.6)  $\phi$  を用いて, 次式のような連続な関数を定義出来る.

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}, t) + \phi^h(\mathbf{x})[u](\mathbf{x}, t)\tag{5.2.8}$$

そして, 式(5.2.8)を式(5.1.2 再)へ代入し, 式(5.2.7)を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}u(\mathbf{x}, t) &= \hat{u}(\mathbf{x}, t) + \{H_S(\mathbf{x}) - \phi^h(\mathbf{x})\}[u](\mathbf{x}, t) \\ &= \hat{u}(\mathbf{x}, t) + M_S^h(\mathbf{x})[u](\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

以後, 変位場は式(5.2.9)を用いて表すものとし, 式(5.2.9)は, 変位場の連続部分  $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$  と不連続を含み領域  $\Omega_h$  を台とする関数  $M_S^h(\mathbf{x})[u](\mathbf{x}, t)$  の和によって表されたとする. (図 5.5 参照). このようにすると, 変位境界条件は  $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$  の項のみに与えられる. この時, 式(5.2.9)で表される不連続変位場は, 5.2.4 節で述べる有限要素近似に適したものであるこ

とが分かる.

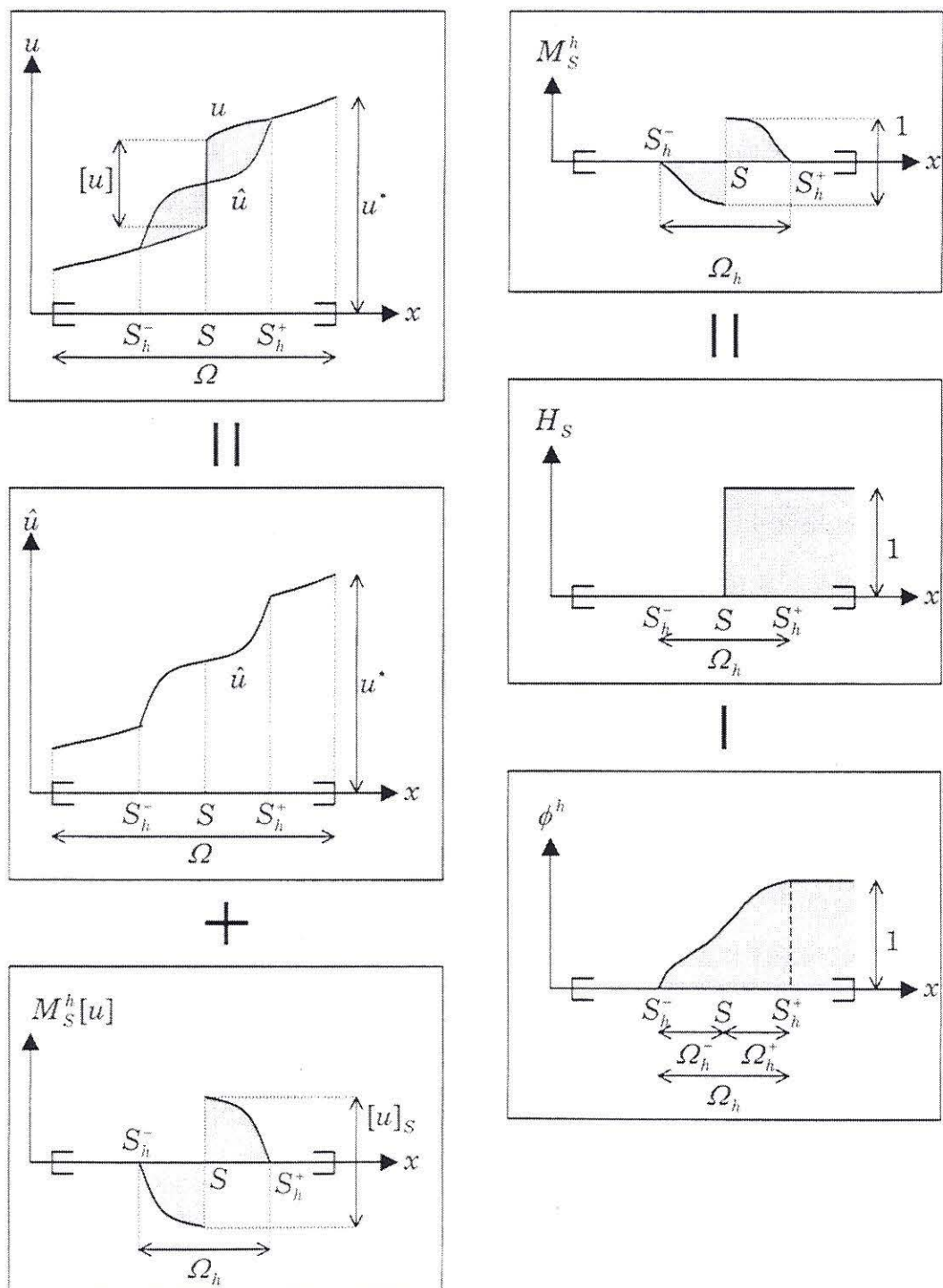


図 5.5 不連続変位場の修正

ここで、式(5.2.9)の不連続変位場は完全に一般的なものである。領域  $\Omega_h$  の形状及び大きさは任意である。関数  $\phi^h(\mathbf{x})$  は、連続であることと、そして式(5.2.6)で示される制限以外は、領域  $\Omega_h$  で全く任意である。

また、式(5.1.2 再)と式(5.2.9)で示される変位場は全く等価なものである。式(5.2.7)と式(5.2.8)を用いて、式(5.1.2 再)から式(5.2.6)が、又は式(5.2.6)から式(5.1.2 再)が得られる。故に、5.1 節で述べられた強不連続解析の結論は、式(5.2.9)を用いた場合にも完全に適用出来る。

### 5.2.3 弱形式化

次式のような仮想仕事の原理を考える。

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \hat{\eta} \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot \hat{\eta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} t^* \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma \quad (5.2.10)$$

ここで、 $\hat{v}$  が次式で定義される運動学的可容変位空間であるとする、

$$\hat{v} := \{\hat{\eta} \in C^0 \mid \hat{\eta}|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (5.2.11)$$

式(5.2.10)の左辺は、式(5.2.11)を考慮して、次式のように変形出来る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \nabla \hat{\eta} \, d\Omega &= \int_{\Omega \setminus S} \sigma \cdot \nabla \hat{\eta} \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega \setminus S} \operatorname{div} \sigma \cdot \hat{\eta} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-} (\sigma \nu) \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega \setminus S} \operatorname{div} \sigma \cdot \hat{\eta} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma \nu) \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma + \int_S \{(\sigma^+ - \sigma^-) \nu\} \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

式(5.2.10)が全ての試験関数  $\hat{\eta} \in \hat{v}$  に対し成立すると考える。

式(5.2.12)を式(5.2.10)へ代入すると次式が得られる。

$$= - \int_{\Omega \setminus S} (\operatorname{div} \sigma + f) \cdot \hat{\eta} \, d\Omega + \int_S \{(\sigma^+ - \sigma^-) \nu\} \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} (\sigma \nu - t^*) \cdot \hat{\eta} \, d\Gamma = 0 \quad (5.2.13)$$

上式より，以下の支配方程式が得られる．

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma + f &= 0 & \text{in } \Omega \setminus S \\
 \sigma \nu &= t^* & \text{in } \Gamma_\sigma \\
 \sigma^+ n &= \sigma^- n & \text{in } S
 \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

ここで式(5.2.14)と式(5.2.1)～式(5.2.5)を比べると，式(5.2.10)の変分原理から，式(5.2.1)，式(5.2.3)，そして式(5.2.4)は弱形式として満たされていることが分かる．したがって，後は，変位境界条件と不連続面上の表面力ベクトルの連続性を連立して解けば良い．

#### 5.2.4 有限要素近似

簡単化のため，2次元の場合の有限要素近似を考えるが，3次元への拡張も同様に行える．

図 5.6 に示される様な，三角形定ひずみ要素を用い，不連続面を含む，ある領域  $\Omega$  の有限要素近似を考える．当分の間，不連続面  $S$  の位置は分かっているものと仮定する．不連続面  $S$  を含む要素群を領域  $\Omega_h$  (図 5.6 (上)) によって定義し，そして不連続面  $S$  の右側と左側に位置する境界  $S_h^+$  と  $S_h^-$  は，領域  $\Omega_h$  に属する要素の要素辺によって構成される． $\mathcal{J}$  は領域  $\Omega_h$  に属する要素  $\Omega_e$  (図 5.6 (中)) の数を意味し，即ち次式の様に表せる．

$$\mathcal{J} := \{e \in 1, 2, \dots, E \mid \Omega_e \subset \Omega_h\} \tag{5.2.15}$$

$e \in \mathcal{J}$  となる各要素は， $S_h^-$  (又は  $S_h^+$ ) に属する要素辺 (その要素辺は節点  $i_e$  と  $j_e$  から成る．図 5.6 (中) 参照) と  $S_h^+$  (又は  $S_h^-$ ) に属する節点  $k_e$  (以後，孤立節点と呼ぶ．) を持つ． $S_e$  は  $\Omega_e$  内部の不連続面  $S$  を近似する線分であり，そして  $n_e$  は (節点  $k_e$  向きの)  $S_e$  の法線ベクトルである． $S_e$  と  $n_e$  の定義は，図 5.6 (中) に示されるように，領域  $\Omega_e^+$  と  $\Omega_e^-$  を決定する．

式(5.2.9)のように修正された  $\Omega_e$  内の任意時刻  $t$  の不連続変位場を次式で表される有限要

素近似を行う.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}(t)}_{\hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)} + \sum_{e \in \mathcal{J}} \mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x}) \underbrace{\alpha_e(t)}_{[\mathbf{u}]^h(t)} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \subset \Omega_h \quad (5.2.16)$$

$$\mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x}) = H_{S_e}(\mathbf{x}) - \phi_e^h(\mathbf{x}) \quad (5.2.17)$$

$$\phi_e^h(\mathbf{x}) = N_{k_e}(\mathbf{x}) \quad (5.2.18)$$

ここで,  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  は通常の内挿関数マトリックス,  $\mathbf{a}(t)$  は節点変位ベクトル,  $H_{S_e}(\mathbf{x})$  は領域  $\Omega_h$  に制限された Heaviside の単位関数, そして  $N_{k_e}(\mathbf{x})$  は孤立節点  $k_e$  に関する一般の線形内挿関数である. 式(5.2.17)で定義される単位ジャンプ関数  $\mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x})$  は図 5.6 (下) に示されている.

式(5.2.16)の変位場の定義により, 次のことが述べられる. 式(5.2.16)の  $\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}(t)$  の項は, 式(5.2.9)の変位場の連続で滑らかな部分  $\hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)$  に相当するものである. 従って, 5.2.2 節で述べられているように, 変位境界条件は, 通常の有限要素近似と同様に,  $\hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)$  に対応する節点変位  $\mathbf{a}(t)$  に課せられる. 式(5.2.16)の様に, もし  $\mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x})$  が領域  $\Omega_h$  に属する要素に関してのみ定義されるならば, 変位場  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$  は式(5.2.9)で示される変位場に相当し, 変位ジャンプの関数  $[\mathbf{u}]^h(\mathbf{x}, t)$  は (要素上で) 区分的に一定と考えられ,  $\alpha_e(t)$  は要素の変位ジャンプを表すものである. もし  $\mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x})$  が物体  $\Omega$  上のすべての要素で定義されるならば, 式(5.2.9)で示される変位場に相当する  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$  により,  $\Omega \setminus \Omega_h$  となる全ての要素で  $\alpha_e(t) = 0$  とならねばならない. この考えは, 以下の有限要素近似に用いられるものであり, 式(5.2.16)は次式のように, 若干修正される.

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{a}(t)}_{\hat{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)} + \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{M}_{S_e}^h(\mathbf{x}) \underbrace{\alpha_e(t)}_{[\mathbf{u}]^h(t)} \quad (5.2.19)$$

$$\alpha_e(t) = 0 \quad \forall e \notin \mathcal{J} \text{ and } \forall e \notin \Omega_e \subset \Omega_h \quad (5.2.20)$$

ここに  $n_e$  は有限要素分割の全要素数である.



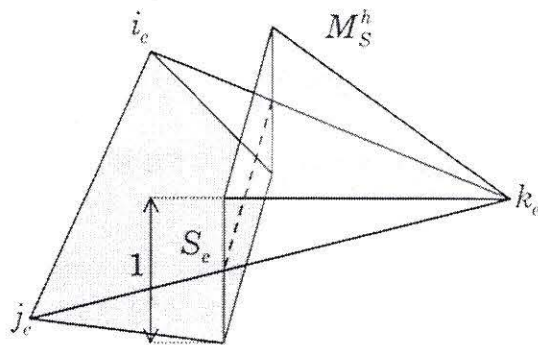
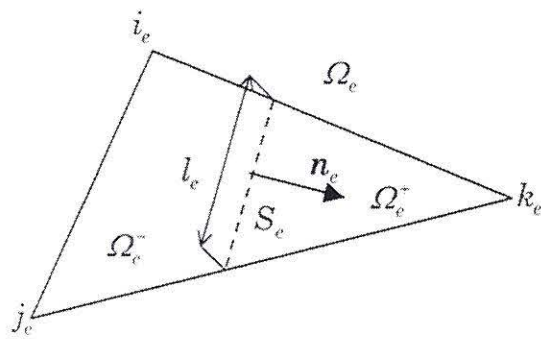
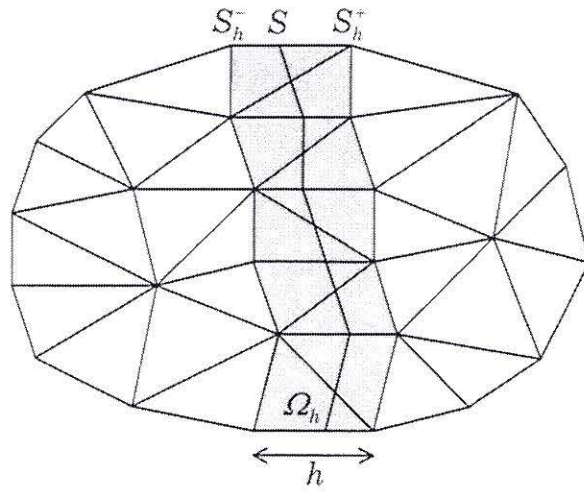


図 5.6 物体を横切る不連続線 (上)  
 不連続線を有する要素 (中)  
 不連続内挿関数 (下)

式(5.2.19)を用いて、ひずみ場は変位場の勾配により次式の様に求められる。

$$\varepsilon^h(\mathbf{x}, t) = \underbrace{(\nabla \hat{\mathbf{u}}^h)^S}_{\text{regular } \tilde{\varepsilon}^h} + \underbrace{\sum_{e=1}^{n_e} (\nabla \mathbf{M}_{S_e}^h \otimes \alpha_e)^S}_{\text{enhanced } \tilde{\varepsilon}^h} \quad (5.2.21)$$

ここで上付き添字  $(\cdot)^S$  は  $(\cdot)$  の対称部分を意味する。式(5.2.17)と式(5.2.18)より次式が得られる。

$$\nabla \mathbf{M}_{S_e}^h = \begin{cases} \delta_{S_e} \mathbf{n}_e - \nabla N_{k_e} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.2.22)$$

ここに  $\delta_{S_e}$  は、領域  $\Omega_e$  に制限され、そして要素内部の不連続面  $S_e$  に沿った Dirac のデルタ関数であり、次式を満たす。

$$\int_{\Omega_e} \delta_{S_e} \omega_0 d\Omega = \int_{S_e} \omega_0 d\Gamma \quad \forall \omega_0 \in C_0^\infty(\Omega_e) \quad (5.2.23)$$

ここで、式(5.2.21)に現れる  $(\nabla \mathbf{M}_{S_e}^h \otimes \alpha_e)^S$  の項は、拡張ひずみ場 (enhanced strain)  $\tilde{\varepsilon}^h$  と呼ばれるもので、各要素に対して定義され、ひずみ場の連続部分  $\hat{\varepsilon}^h = (\nabla \hat{\mathbf{u}}^h)^S$  を補い、強不連続に伴い非有界なひずみ場を表すものである。このように、ひずみ場の連続部分に拡張部分を重ね合わせることが、Assumed Enhanced Strain method (AES) と呼ばれる所以である。

通常の工学的手法と同様に、対称なひずみテンソルと応力テンソルの代わりに、ベクトル化されたひずみベクトル ( $\varepsilon = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T$ ) と応力ベクトル ( $\sigma = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$ ) を用いると、デカルト座標系における式(5.2.21)と式(5.2.22)は次式の様になる。

$$\varepsilon^h = \hat{\varepsilon}^h + \sum_{e=1}^{n_e} \tilde{\varepsilon}_e^h = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{G}_e \alpha_e \quad (5.2.24)$$

$$\hat{\varepsilon}^h = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (5.2.25)$$

$$\tilde{\varepsilon}_e^h = G_e \alpha_e \quad (5.2.26)$$

$$G_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta_{S_e} n_x - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \delta_{S_e} n_y - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial y} \\ \delta_{S_e} n_y - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial y} & \delta_{S_e} n_x - \frac{\partial N_{k_e}}{\partial x} \end{bmatrix} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.2.27)$$

ここに  $\mathbf{B}$  は通常の変形マトリックス, そして  $n_x$  と  $n_y$  は  $\mathbf{n}_e$  の成分である ( $\mathbf{n}_e = \{n_x, n_y\}^T$ ).

今, 式(5.2.11)の運動学的可容変位空間に有限要素近似を行うと次式が得られる.

$$\hat{\mathbf{v}} := \{\hat{\boldsymbol{\eta}}^h \mid \hat{\boldsymbol{\eta}}^h = N\mathbf{a} \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}^h|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (5.2.28)$$

式(5.2.28)を式(5.2.10)の仮想仕事の原理に代入し, 変形すると次式の様な方程式が得られる.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.2.29)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Gamma \quad (5.2.30)$$

ここで上付き添字  $(\cdot)^T$  は  $(\cdot)$  のの転置を意味する.

なお, 式(5.2.29)は弱形式(5.2.10)の別の表現である. 応力場  $\boldsymbol{\sigma}^h$  と変形マトリックス  $\mathbf{B}^T$  は共に有限であり, そして不連続面の面積はゼロであるので, 式(5.2.29)の積分領域  $\Omega$  は, 領域  $\Omega \setminus S$  に制限出来, それ故, 式(5.2.29)は次式の様に書き直すことが出来る.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega = \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (5.2.31)$$

5.2.3 節で述べた様に, 式(5.2.31)は, 不連続面上の表面力の連続性の要請を付加して解かなければならない. 従って, 式(5.2.5)を応力ベクトルを用いて書き直すと次式のようにな

る.

$$\sigma_S \cdot \mathcal{N} = \sigma^+ \cdot \mathcal{N} (= \sigma^- \cdot \mathcal{N}) = \sigma_{\Omega \setminus S} \cdot \mathcal{N} \quad \text{in } S \quad (5.2.32)$$

ここで,

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (5.2.33)$$

であり,  $\sigma_{\Omega \setminus S}$  は領域  $\Omega \setminus S$  の応力場を表す.

ここで, 上述の手法を利用して, 次式のような方程式を考える.

$$\int_{\Omega_e} G_e^{*T} \sigma^h d\Omega_e = 0 \quad e = 1, \dots, n_e \quad (5.2.34)$$

$$G_e^*(x) = \begin{cases} (\delta_{S_e} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \mathcal{N} & \forall x \in \Omega_e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.2.35)$$

ここに  $l_e$  は要素内部の不連続面  $S_e$  の長さである (図 5.6 (中) 参照). 式(5.2.35)を式(5.2.34)

に代入し, 式(5.2.23)を考慮すると, 次式を得る.

$$\int_{S_e} \sigma^h \cdot \mathcal{N} d\Gamma - \frac{l_e}{\Omega_e} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \sigma^h \cdot \mathcal{N} d\Omega_e = 0 \quad (5.2.36)$$

これは次式のように書き直される.

$$\underbrace{\frac{1}{l_e} \int_{S_e} \sigma^h \cdot \mathcal{N} d\Gamma}_{\text{average on } S_e} = \underbrace{\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e \setminus S_e} \sigma^h \cdot \mathcal{N} d\Omega_e}_{\text{average on } \Omega_e \setminus S_e} \quad (5.2.37)$$

式(5.2.37)の左辺と右辺は, 式(5.2.32)の不連続面上での表面力ベクトルの連続性の要請をそ

れぞれ、不連続面の長さで平均したものである。それ故、式(5.2.34)は、分割された要素内で有効な 1 種の不連続面上での表面力ベクトルの連続性の要請である。

以上より、次式で示される近似方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega &= \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e &= 0 \quad e = 1, \dots, n_e \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

ここに  $\boldsymbol{\sigma}^h(\boldsymbol{\varepsilon}^h)$  は、前述の超関数的ひずみ軟化特性を持つ非線形構成式であり、 $\boldsymbol{\varepsilon}^h$  は、節点変位ベクトル  $\mathbf{a}$  と要素の変位ジャンプベクトル  $\boldsymbol{\alpha}_e$  を用いて式(5.2.24)～式(5.2.26)で与えられるものであり、式(5.2.38)は、未知変数  $\mathbf{a}$  と  $\boldsymbol{\alpha}_e$  を決定する連立方程式を与える。解析のある時刻において、領域  $\Omega_h$  に属する要素においてのみ、 $\boldsymbol{\alpha}_e$  はゼロではなく、それを計算してゆけば、不連続面の進展経路が分かる（図 5.6（上）参照）。

現在考えている定ひずみ 3 角形要素の場合、ひずみ場は、領域  $\Omega_e \setminus S_e$  と  $S_e$  の両方で区分的に一定であり、結果として、構成式から対応する応力場も同様である。 $S_e$  と  $\Omega_e \setminus S_e$  の大きさ（測度）はそれぞれ、 $l_e$  と  $\Omega_e$  であるので、式(5.2.37)は次式のように書き直すことができる。

$$\sigma_{S_e}^h \cdot \mathcal{N} = \sigma_{\Omega_e \setminus S_e}^h \cdot \mathcal{N} \quad (5.2.39)$$

故に、式(5.2.32)は領域  $\Omega_h$  に属する要素において区分的に満たされている。

ここで、 $l_e$  が、 $S_e$  の長さとして、式(5.2.36)の  $l_e/\Omega_e$  の項において同じ値であるなら、式(5.2.36)の  $l_e$  の値に無関係に、式(5.2.39)が得られる。したがって  $l_e$  は有限要素定式化において陽に現れず、任意の  $l_e$  の値に対して成立する。

また、式(5.2.23)を考慮すると、式(5.2.35)と式(5.2.38)に現れるマトリックス  $\mathbf{G}_e^*$  は次式の条件を満たすことも分かる。

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^* d\Omega_e = 0 \quad (5.2.40)$$

ひずみ場の連続部分  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^h$  と拡張部分  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^h$  で作られる空間を、それぞれ  $\hat{\mathcal{V}}$  と  $\tilde{\mathcal{V}}$  で表すと、式

(5.2.25)から式(5.2.27)を用いると次の関係が成立している.

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} \cap \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \emptyset \quad (5.2.41)$$

式(5.2.40)と式(5.2.41)は, ここで提案された拡張ひずみ近似のコンシステンシー (consistency) と安定性の要請の十分条件となっている.

増分形式の有限要素解析を行うため, 式(5.2.38)を次式のように, 増分形式に書き直す.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}^h d\Omega &= \dot{f}_{\text{ext}e} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^h d\Omega_e &= 0 \quad e = 1, \dots, n_e \end{aligned} \quad (5.2.42)$$

ここに, 式(2.15)より,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^h = \mathbf{C}^{lg} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \quad (5.2.43)$$

であり, 式(5.2.43)を式(5.2.42)へ代入し, 式(5.2.24)から式(5.2.26)を考慮して, 整理すると, 次式の要素接線剛性マトリックスが得られる.

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}^{lg} \mathbf{B}_e & \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}^{lg} \mathbf{G}_e \\ \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{C}^{lg} \mathbf{B}_e & \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{C}^{lg} \mathbf{G}_e \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (5.2.44)$$

結局, 要素接線剛性方程式は次式の様になる.

$$\mathbf{K}_e \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{f}}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \{\dot{\mathbf{a}} \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e\}^T, \quad \dot{\mathbf{f}} = \{\dot{f}_{\text{ext}e} \quad 0\}^T \quad (5.2.45)$$

ここに  $\mathbf{B}_e$  は, 要素の変形マトリックスを表す. 式(5.2.27)と式(5.2.35)により, 特別な場合を除いて,  $\mathbf{G}_e \neq \mathbf{G}_e^*$  である. それ故, 接線構成テンソル  $\mathbf{C}^{lg}$  が対称になる場合でさえも, 式(5.2.45)の要素接線剛性方程式は非対称である. これは, 式(5.2.32)の不連続面上での表面力ベクトルの連続性が変分原理の中に課せられていないからである.

ここで、前述の有限要素定式化は、AES の利点を全て享受する式(5.2.38)の連立方程式に基づいており、特に、その利点の 1 つは実行し易さである。解析を行うために、変位ジャンプベクトルを表すための 2 つの自由度を持つ付加的な内部節点を各要素に加えることを、通常の有限要素解析のプログラムに考慮するだけで良く、その付加的な内部節点は、外部節点力ベクトル  $\dot{f}_{\text{ext}}$  に影響しない (式(5.2.38)参照)。そして、ひずみを求める通常の変形マトリックス  $B_e$  は、4 番目の節点となる付加的な内部節点を考慮するためのマトリックス  $G_e$  を用いて拡張されなければならない (式(5.2.24)～式(5.2.27)参照)。また、残りの節点力ベクトルを計算するために、4 番目の節点を考慮するためのマトリックス  $G_e^*$  (式(5.2.5.25)参照) を用いて、 $B_e$  を拡張しなければならない。更に、要素接線剛性マトリックスや残りの節点力に対する 4 番目の節点の影響を、要素内部に凝縮することによって、計算の労力を軽減する事が出来る。

#### 5.2.5 デルタ関数の近似と積分規則

この節では、式(5.2.27)や式(5.2.35)に現れるデルタ関数を、数値解析で扱うことについて述べる。Dirac のデルタ関数を扱う数値解析を行うことに元々含まれる困難を克服するために、近似パラメータ  $k$  を導入し、近似パラメータ  $k$  が 0 に近づくと (実際に  $k$  は、計算機の精度が許容する位十分小さくする)、デルタ関数に収束する。連続化された近似デルタ関数を用いる。このようにして、デルタ関数  $\delta_{S_e}$  を近似デルタ関数  $\delta_{S_e}^k$  に置き換える。

要素内部の不連続面  $S_e$  を囲む幅  $k$  の領域  $\Omega_e^k$  (今後、これを、要素内部の不連続領域と呼ぶ。) によって、 $\delta_{S_e}^k$  を定義すると次式の様になる (図 5.7 参照)。

$$\delta_{S_e}^k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \forall x \in \Omega_e^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.2.46)$$

式(5.2.46)より、式(5.1.23)の軟化パラメータ  $H$  は、近似軟化パラメータ  $H^k$  によって、構成式の中で置き換えることが出来、次式の様に与えられる。

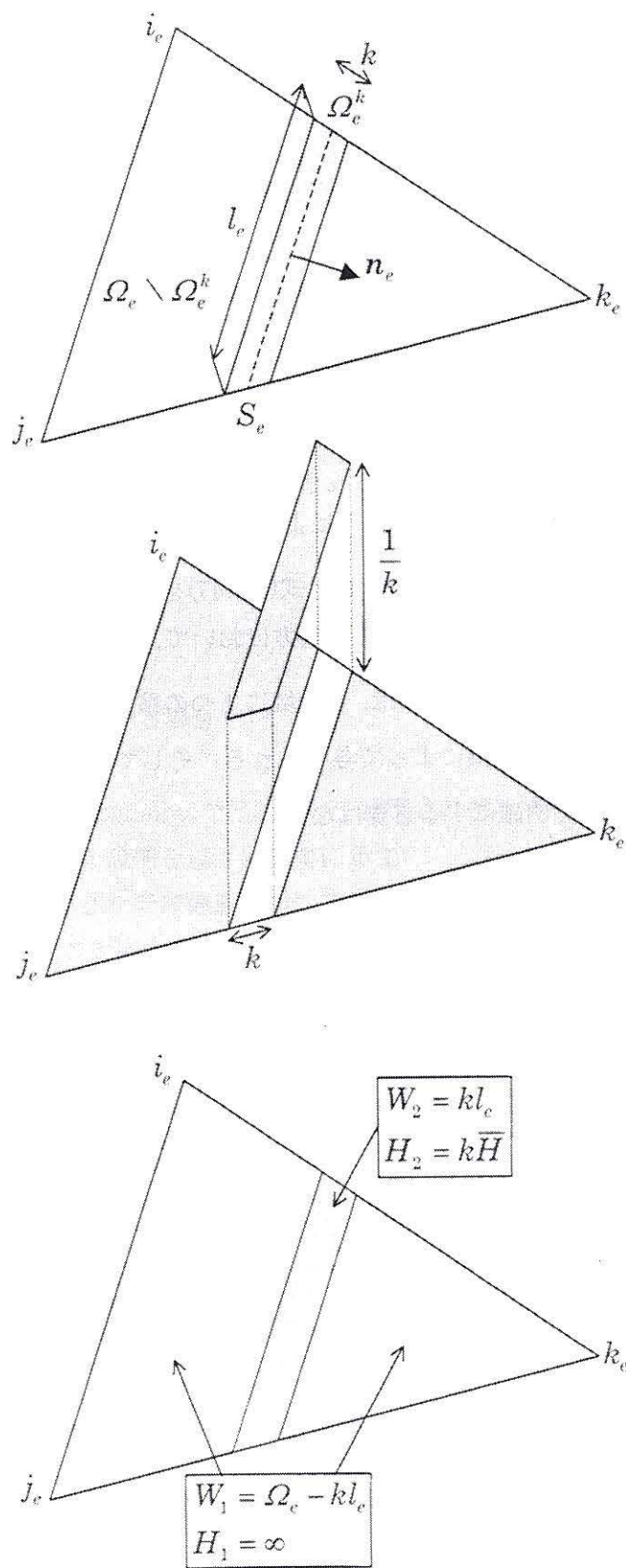


図 5.7 近似デルタ関数と積分規則



$$H^k(\mathbf{x}) = \begin{cases} k\bar{H} & \forall \mathbf{x} \in \Omega_e^k \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{elastic behaviour}) \quad (5.2.47)$$

ここで、本論文での定式化における近似パラメータ  $k$  は、局所化現象を捕らえるいくつかの連続体モデルにおいて、要素分割に直接依存する特性長と呼ばれるものの役割をある程度持っている。両方の場合（現在の定式化と特定の連続体モデル）において、このパラメータは、構成式の軟化の傾きに影響するものである。しかし、ここでの  $k$  は要素分割に全く依存しない。式(5.2.47)より、 $k$  がゼロになると、構成式は完全塑性体ないしは完全損傷（ $H = 0$ ）を意味する。

要素内部の不連続化領域  $\Omega_e^k$  を考慮することにより、特定の要素の積分規則が与えられる。

5.2 節の有限要素定式化の結果に、式(5.2.46)と式(5.2.47)を考慮すると、ひずみ場（その結果として、応力場）は領域  $\Omega_e^k$  と  $\Omega_e \setminus \Omega_e^k$  の両方において、区分的に一定である（図 5.7 参照）。式(5.2.38)の方程式を解くためには、各領域に 1 つの積分点が必要であると分かり、その重みは、対応する領域の面積によって与えられる。そして区分的に一定であるので、その領域の積分点の位置を明確にする必要はない。

## 6. 経路独立積分

前章で述べた強不連続解析は工学上有意義な解析手法であるが、現在まで 1 次元の場合を除き、理論解が得られない事もあり、それらの解析手法の精度検証に関する研究は筆者の知る限り皆無である。興味ある解析手法であっても、精度が悪ければ、工学的に無意味であるので、解析手法の精度検証は非常に重要である。

強不連続解析の精度検証の手法として、強不連続解析では材料定数として与えられている、破壊力学の重要なパラメータの 1 つである破壊エネルギー、即ちエネルギー解放率を精度良く定量的に表しているかを検討することを提案する。その際、このエネルギー解放率を求めるために、周知の J 積分と、不連続面上に結合応力領域を含む場合に適用できる事を新たに証明した経路独立な E 積分を使用するため、本章では、J 積分と E 積分の定式化について説明する。

### 6.1 J 積分 <sup>1), 2), 3)</sup>

#### 6.1.1 不連続面先端が直進する場合 <sup>4), 5)</sup>

J 積分とは、J.Rice, J.Eshelby などによって提案されたエネルギー解放率を求める経路独立な積分公式であり、その説明を以下に簡単に示す。

図 6.1 のように均質な 2 次元非線形超弾性体内に  $x$  軸に沿う直進き裂がある場合を考え、 $x$  の  $b(t)$  から  $a(t)$  の間まで応力がゼロでなく、 $b(t)$  より左側は、応力がゼロとなっているとして、この時以後  $b(t)$  をき裂先端、 $b(t)$  から  $a(t)$  を結合応力領域と呼ぶ。き裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を  $A$ 、その境界を  $\Gamma$  とすると、J 積分は次式で定義される。

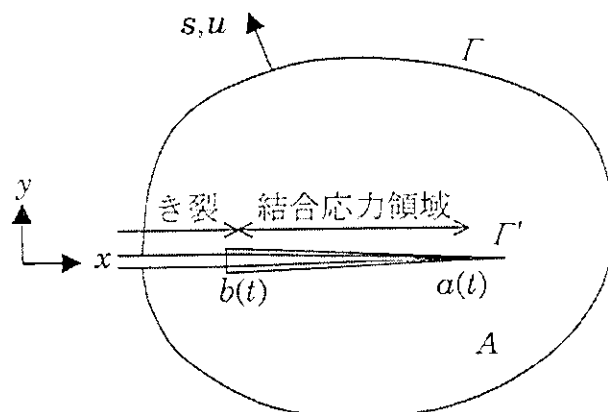


図 6.1 き裂先端に結合応力領域がある場合の J 積分の定式化

$$J \equiv \int_{\Gamma} (w dy - \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} ds) \quad (6.1.1)$$

ここで、 $w$ 、 $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{u}$ はそれぞれひずみエネルギー密度、 $\Gamma$ 上の表面力、変位である。なお  $J$  積分がエネルギー解放率と等しくなるのはき裂が直進する即ち  $x$  軸の正方向へのみ進展する場合限られる事に注意したい。

$J$  積分値は、領域  $A$  が直線き裂先端  $b(t)$  から結合応力領域先端  $a(t)$  までを含む限り、積分経路  $\Gamma$  に依存しない経路独立な積分である。

また図 6.1 に示すようにき裂先端近傍にある結合応力領域を常に取りつつ、結合応力領域に密接するように  $\Gamma$  を縮小しそれを  $\Gamma'$  とすると、 $dy \rightarrow 0$  より、式(6.1.1)は次式となる。

$$\begin{aligned} J &= - \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} ds = - \int_{\Gamma'} \sigma \frac{\partial \delta}{\partial x} dx \\ &= - \int_{\Gamma'} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta(b,t)} \sigma(\delta) d\delta \right\} dx \\ &= \int_0^{\delta(b,t)} \sigma(\delta) d\delta \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

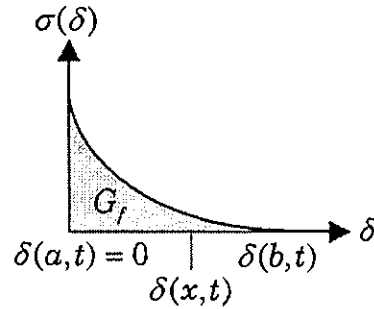


図 6.2 開口変位と結合応力の関係

ここで、 $\sigma$  と  $\delta$  はそれぞれ結合応力領域の応力と開口変位であり、 $J$  の値は図 6.2 の曲線下の面積に等しい。また、この面積は Oliver が論文で一様変形場を仮定して不連続面上での外力がなす仕事である式(5.1.55)の単位面積当りのエネルギーである式(5.1.56)の破壊エネルギーに等しいことは自明である。すなわち、

$$J = G_f = - \frac{r_0^2}{2H} \quad (6.1.3)$$

となる.

### 6.1.2 不連続面先端が折れ曲がる場合<sup>6)</sup>

図 6.3 のように 2 次元非線形超弾性体内において, 結合応力が作用し, 準静的に進展する不連続面を考える. 本節では, その不連続面先端  $a(t)$  から  $b(t)$  までは結合応力領域, その一端  $b(t)$  をき裂先端と呼ぶ. 結合応力領域での応力  $\sigma$  は開口変位  $\delta$  の関数  $\sigma(\delta)$  となり, 1 次元の場合は図 6.2 と同様である. また不連続面先端を含む基準系に固定された正則な閉領域を  $A$ ,  $A$  の境界を  $\Gamma$  とし,  $\Gamma$  上の表面力, 変位をそれぞれ  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{u}$  とする.

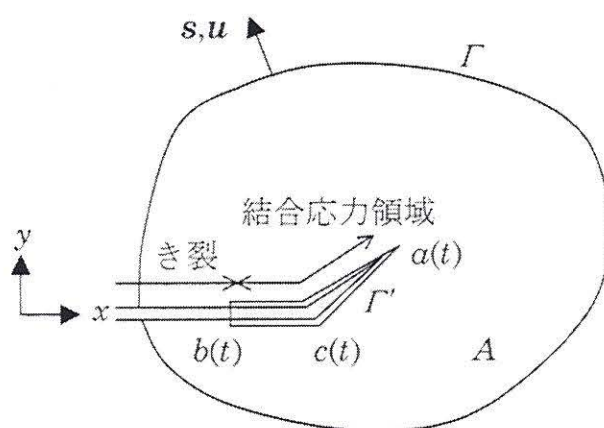


図 6.3 き裂先端に折れ曲がり結合応力領域がある場合の J 積分の定式化

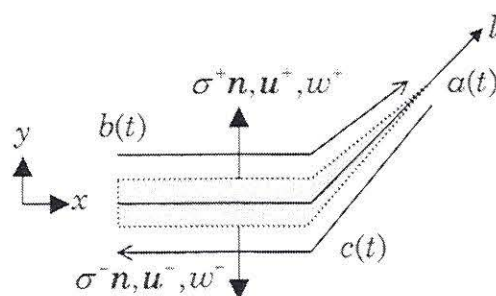


図 6.4 結合応力領域に沿った  $l$  軸

前節のように J.Rice, J.Eshelby などによって提案されたき裂が直進する場合のエネルギー解放率を求める経路独立な J 積分の公式は式(6.1.1)で与えられる. ここでは, その不連続面

が折れ曲がる場合、式(6.1.1)の J 積分の値と破壊エネルギーの関係を考察する。ただし、き裂の先端  $b(t)$  は、直進していると仮定する。

今、図 6.3 において境界  $\Gamma$  を結合応力領域を含みつつ、幅ゼロの不連続面  $s$  への極限である  $\Gamma'$  に縮小する。この時、上式は、形式的に、

$$J = \int_{\Gamma'} w dy - \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \quad (6.1.4)$$

となることは簡単に証明出来る。ここで、不連続面  $s$  の上、下面の変位をそれぞれ  $u^+$ ,  $u^-$  とする。その時、力のつりあいより、領域  $A$  から  $s$  への極限である表面力  $\sigma^+ \mathbf{n}$ ,  $\sigma^- \mathbf{n}$  と、不連続面上の表面力  $\sigma_s \mathbf{n}$  は、連続である。一方、式 (6.1.1) 中のひずみエネルギー  $w$  は、応力、ないしひずみが、不連続面上で、一般的に連続とは限らないので、 $w$  自身も連続とは限らない。そこで、今、図 6.4 のように結合応力領域に沿った  $l$  軸を考える。 $l$  は、 $x-y$  座標系と関数関係にあり、図 6.3 および図 6.4 に示したように、不連続面の折れ曲がり点を  $c(t)$  とおき、 $b(t)$  から  $c(t)$  までは、 $dy = 0$  である事に注意すると、式(6.1.4)右辺の第 1 項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} w dy &= \int_b^a w^+ \frac{\partial y}{\partial l} dl + \int_a^b w^- \frac{\partial y}{\partial l} dl \\ &= \int_c^a [w] \frac{\partial y}{\partial l} dl \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

となる。ここで、 $[w] = w^+ - w^-$  である。また式(6.1.4)右辺第 2 項は、

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma'} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds &= - \left( \int_b^a (\sigma^+ \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x} dx + \int_a^b (\sigma^- \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x} dx \right) \\ &= \int_a^b (\sigma_s \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial [u^+ - u^-]}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x} dx \\ &= \int_a^b (\sigma_s \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial l} dl \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial l} \left[ \int_0^{\delta(b,l)} \sigma_s(\delta) \mathbf{n} \cdot d\delta \right] dl \\ &= \int_0^{\delta(b,l)} \sigma_s(\delta) \mathbf{n} \cdot d\delta = G_f \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

となり、結局式(6.1.4)のJ積分値は式(6.1.5)の値だけ破壊エネルギーとは異なる値になることが分かる。

以上からすぐ分かる事だが、式(6.1.1)において、閉領域Aの境界 $\Gamma$ に、最初から、A内に含まれる不連続面上下の積分を加えれば、その積分値は、破壊エネルギーと一致する。しかしながら、3角形定ひずみ要素を用いて、その中に不連続面を考え強不連続解析を行う場合には、その要素内の不連続面両側の応力ないしひずみは等しくなり、結局ひずみエネルギー $w$ も等しくなるので、式(6.1.5)の値はゼロとなり、式(6.1.1)のような $\Gamma$ 上の経路だけで設定されたJ積分の解析値は、破壊エネルギー $G_f$ と一致する。

## 6.2 E積分<sup>5), 6)</sup>

2次元非線形超弾性体内において、結合応力が作用し、準静的に直進または折れ曲がり進展する不連続面を考える（図6.3参照）。結合応力領域での応力 $\sigma$ と開口変位 $\delta$ の関係は図6.2に示される。また不連続面先端を含む基準系に固定された正則な閉領域をA、Aの境界を $\Gamma$ とし、 $\Gamma$ 上の表面力、変位をそれぞれ $\mathbf{s}$ 、 $\mathbf{u}$ とする。

結合応力領域が存在する場合、き裂が単位長さ進展するために消費されるエネルギー、即ちエネルギー解放率は力学的エネルギー保存則より次式のように定義される。

$$E\dot{b} \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\mathbf{s} - \left\{ \frac{d}{dt} \int_A W d\alpha + \frac{d}{dt} \int_b^a w dl \right\} \quad (6.2.1)$$

ここで、ひずみエネルギー $W$ と結合応力領域での仕事 $w$ は次式で与えられる。

$$W(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \sigma \cdot \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (6.2.2)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t (\sigma_s \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (6.2.3)$$

従って、き裂が進展せず $\dot{b}(t) = 0$ であるなら、式(6.2.1)右辺は、物体力がない場合の準静的

なつりあい式  $\text{div } \sigma = \mathbf{0}$  と発散定理により，次式が成立する．

$$\int_r \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} ds - \int_b^a (\sigma_s \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial t} dl = \frac{d}{dt} \int_A W d\alpha \quad (6.2.4)$$

従って，式(6.2.1)の右辺の値はゼロとなる．

また，結合応力領域での応力  $\sigma$  は開口変位  $\delta$  の関数であるので， $w$  は次式のように表せる．

$$w(x, t) = w(\delta(x, t)) = \int_0^{\delta(x, t)} \sigma_s(\delta) \mathbf{n} \cdot d\delta \quad (6.2.5)$$

ここで，

$$w(a, t) = 0 \quad \because \delta(a, t) = 0 \quad (6.2.6)$$

であり，また式(6.2.3)より，次式が得られる．

$$\int_b^a \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dl = \int_b^a \sigma_s \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} dl \quad (6.2.7)$$

式(6.2.4)，(6.2.6)，(6.2.7)を式(6.2.1)へ代入すると，

$$E\dot{b} = w(b, t)\dot{b} = \left\{ \int_0^{\delta(b, t)} (\sigma_s \mathbf{n}) \cdot d\delta \right\} \dot{b} = G_f \dot{b} \quad (6.2.8)$$

$$\therefore E = G_f \quad (6.2.9)$$

となり，式(6.2.1)の  $E$  の値は破壊エネルギー  $G_f$  と一致する．

次に，荷重パラメータ  $\beta$ （具体的には，境界で与えられた荷重，又は変位の増加を示す

スカラー値、本論文では、境界に強制変位を与えるので  $\beta$  はその強制変位の値に等しい) を導入し、式(6.2.1)に、式(6.2.2)、(6.2.3)を代入し、発散定理を用いると、式(6.2.1)は、次式のように積分経路上の表面力と変位によって求めることが出来る。

$$E = \int_r \int_0^\alpha \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta \, ds \quad (6.2.10)$$

上式をき裂先端に結合応力領域を有するき裂進展時のエネルギー解放率を求める E 積分と呼ぶ。結局この式は結合応力領域が存在しないき裂先端に応力の特異性を残す場合の E 積分公式<sup>7)</sup>と全く同じ式であり、J 積分と異なり、折れ曲がり部分を含めた不連続面に沿う積分は全く不要な、経路独立な積分公式である。この E 積分公式の誘導の際は、き裂先端  $b(t)$  の直進は仮定していない。したがって、E 積分の値がエネルギー解放率に等しくなるのは、J 積分と異なり、直進の場合に限られる事なく、 $b(t)$  の任意方向への折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率をも経路独立積分で求めることが出来るという利点がある。ここで式(6.2.10)を数値解析で計算する場合、き裂の長さが  $b$  のモデル（以下、基本モデルと呼ぶ）とき裂の長さが  $b + \Delta b$  のモデル（以下、き裂進展モデルと呼ぶ）の 2 つのモデルの解析を行う。式(6.2.10)中のき裂長さ  $b$  による偏微分は 2 点差分近似し、 $\beta$  に関する積分は台形公式を用い、経路積分は表面力と変位をそれぞれ離散化した等価節点表面力  $\mathbf{s}_i$  と節点変位  $\mathbf{u}_i$  を積分形路上の全節点で和をとることにより、次式を得る。

$$E = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \beta}{\Delta b} (A - B) \quad (6.2.11)$$

$$A = \frac{\hat{\mathbf{s}}_i^j - \hat{\mathbf{s}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \cdot \frac{\{\tilde{\mathbf{u}}_i^j + \tilde{\mathbf{u}}_i^{j-1}\} - \{\hat{\mathbf{u}}_i^j + \hat{\mathbf{u}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \quad (6.2.12)$$

$$B = \frac{\{\tilde{\mathbf{s}}_i^j + \tilde{\mathbf{s}}_i^{j-1}\} - \{\hat{\mathbf{s}}_i^j + \hat{\mathbf{s}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \cdot \frac{\hat{\mathbf{u}}_i^j - \hat{\mathbf{u}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \quad (6.2.13)$$

ここで、 $n$  は積分形路上の節点の数、 $\alpha$  は全荷重ステップ数、 $\Delta \beta$  は荷重増分量、 $\Delta b$  はき裂長さ  $b$  の基本モデルとき裂長さ  $b + \Delta b$  とのき裂進展モデルのき裂長さの差であり、 $\hat{\mathbf{s}}$ 、 $\hat{\mathbf{u}}$  と  $\tilde{\mathbf{s}}$ 、 $\tilde{\mathbf{u}}$  はそれぞれ基本モデルとき裂進展モデルの表面力及び変位を意味する。

また変位制御の場合の式(6.2.10)の E 積分の物理的意味は、き裂長さ  $b$  の基本モデルとき裂長さが微小量  $\Delta b$  異なるき裂長さ  $b + \Delta b$  のき裂進展モデルとの 2 つのモデルに対し、最終変位状態（図 6.5 中の点線の位置で示される変位状態）に達するまでの仕事の差（仕事変



化率) と等しい事が証明できる. 7)

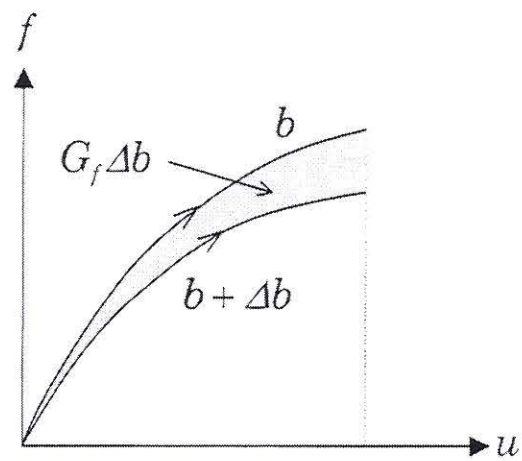


図 6.5 変位制御下でのき裂進展による仕事の変化

## 7. 数値解析 1), 2)

前述の強不連続解析を考慮した有限要素法を用いていくつかの数値解析を行い，強不連続解析の特徴を検証することを試みる．

### 7.1 要素分割不依存性の検証

ひずみの局所化に対する有限要素解析において指摘されていた問題，即ちひずみ軟化挙動を表す構成式を用いた有限要素解析において荷重－載荷点変位が要素分割に依存する問題を，強不連続解析を用いることにより克服出来ることを，本論文において実際に検証を試みる．

#### 7.1.1 解析条件

境界値問題として，図 7.1 に示す正方板の引裂きを考える．平面ひずみを仮定し， $L=10[\text{cm}]$ とする．有限要素解析においては，境界条件は強制変位で与えるものとし，応力集中を緩和するため，載荷点は左端上下に 4 点で与える．

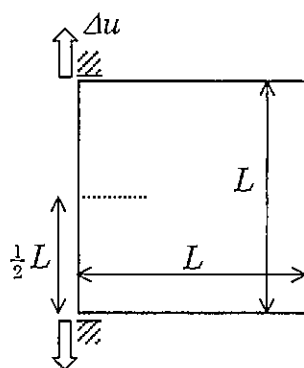


図 7.1 正方板の引裂き

また，解析で使用する材料定数は表 7.1 に示され，解析上のパラメータであり，Dirac のデルタ関数の近似に使用する不連続面の幅  $k$  を  $1.0 \times 10^{-5}[\text{cm}]$  とする．今回は要素分割不依存性の検証を目的とするので，不連続面進展は供試体左端中央より始まり，直進のみと仮定する．また，非線形の軟化曲線を捉えるため，載荷点に強制節点変位を与える増分型有限要素解析に対し，変位制御型 Newton-Raphson 法による収束計算を行う．

表 7.1 材料定数

Young's modulus $E$	29.4	[GPa]
Poisson's ratio $\nu$	0.3	[-]
Fracture energy $G_f$	19.6	[N/m]
Tensile strength $\sigma_u$	2.94	[MPa]
Softening parameter $H$	$-1.5 \times 10^{-7}$	[-]

要素分割不依存性の検証のため図 7.2 に示す 3 つの要素分割を使用する。

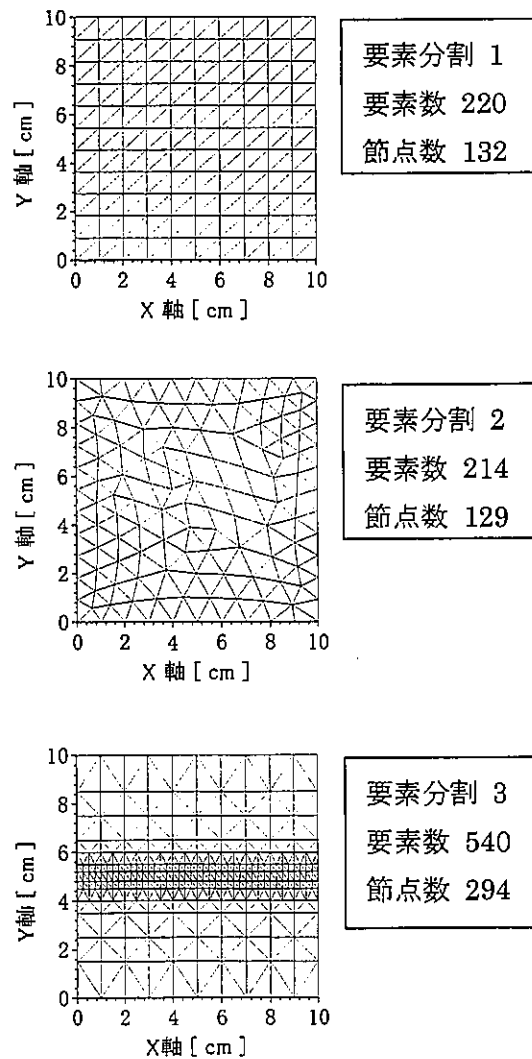


図 7.2 3 種類の要素分割

上記の要素分割 1 と 2 は同程度の節点数と要素数であり，規則的な分割と不規則的な分割の違いがある．要素分割 3 は，不連続面の進展する位置を細かく分割したことが要素分割 1 や 2 と異なっている．この 3 種類の要素分割において，物体全体の挙動を表す荷重 - 載荷点変位曲線が，要素分割に依存するどうかを検証する．

### 7.1.2 解析結果と考察

図 7.3 は荷重 - 載荷点変位曲線である．最も細かい要素分割 3 が最も滑らかな曲線を与えるが，各要素分割においてピーク荷重やその後の軟化挙動が良く一致していることが分かる．従って，物体全体の挙動を表す荷重 - 載荷点変位が要素の大きさ，形状，配置に依存しない結果が得られたことが分かる．

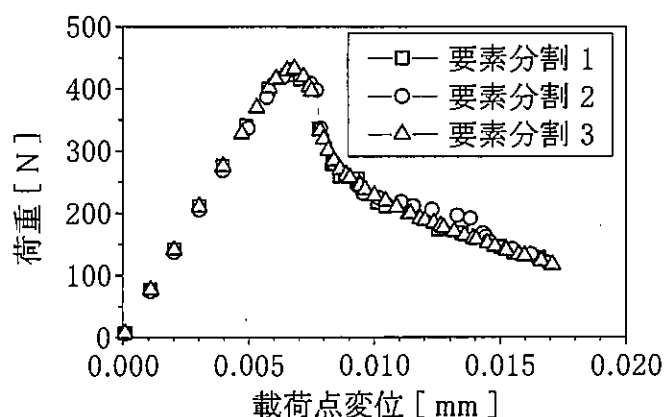


図 7.3 荷重 - 載荷点変位曲線における各要素分割の比較

図 7.4 は各要素分割における最終状態の変形図であり，最終状態とは図 7.3 において載荷点変位が約 0.0175[mm]の状態である．微小な変形を見易くするため，変位を 1000 倍に拡大して図示している．また図中の太い実線は最終状態での不連続面の進展状況を表している．各要素分割において同様の変形が生じており，不連続面が進展する要素において変形が局所的であることやそれ以外の部分では殆ど変形していないことが分かる．また各要素分割において最終状態での不連続面の長さがほぼ一致していることも分かる．

以上より，強不連続解析を考慮した有限要素解析の要素分割不依存性が確認出来た．

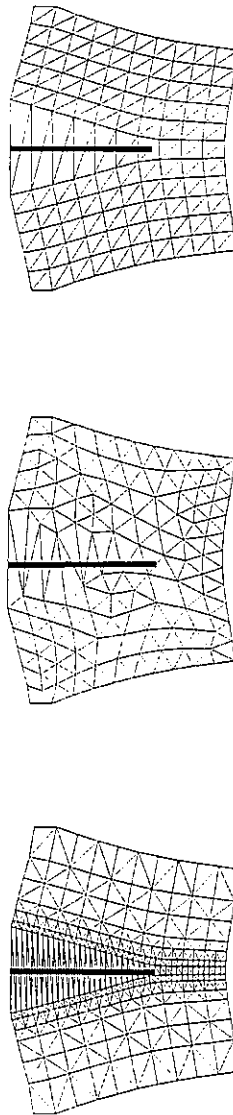


図 7.4 最終状態における変形と不連続面

## 7.2 要素内部の不連続面の幅の不依存性の検証

強不連続解析を考慮した有限要素解析において、要素内部の不連続面の幅 $k$ は、その逆数により Dirac のデルタ関数を近似しているが、マイクロポーラー理論などの一般連続体で使用される物質の特性長とは本質的に異なるものである。すなわち、ここでは、要素内部の不連続面の幅 $k$ は単なる数値解析上のパラメータであるので、数値解析の結果が要素内部の不連続面の幅に依存するかどうかの検証を試みる。

### 7.2.1 解析条件

7.1 節と同様に，境界値問題として，図 7.5 に示す正方形板の引裂きを考える．平面ひずみを仮定し， $L=10[\text{cm}]$ とする．有限要素解析においては，境界条件は強制変位で与えるものとし，応力集中を緩和するため，载荷点は左端上下に 4 点で与える．

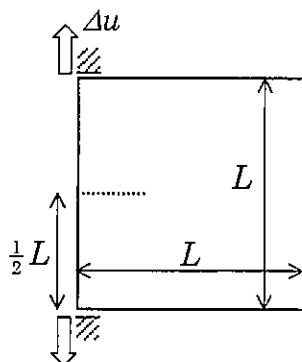


図 7.5 正方形板の引裂き

また，解析で使用する材料定数は表 7.1 に示され，解析上のパラメータであり，Dirac のデルタ関数の近似に使用する不連続面の幅  $k$  を  $1.0 \times 10^{-5}[\text{cm}]$  とする．今回は要素分割不依存性の検証を目的とするので，不連続面進展は供試体左端中央より始まり，直進のみと仮定する．また，非線形の軟化曲線を捉えるため，载荷点に強制節点変位を与える増分型有限要素解析に対し，変位制御型 Newton-Raphson 法による収束計算を行う．

また，使用する有限要素分割は，7.1 節で使用した要素分割 1 を使用する．そして本節での目的である要素内部の不連続面の幅  $k$  を  $10^{-3}$ ， $10^{-4}$ ， $10^{-5}[\text{cm}]$  と変化させ，物体全体の挙動を表す荷重 - 载荷点変位曲線における不連続面の幅の依存性を比較検討する．

### 7.2.2 解析結果と考察

数値解析の結果として，荷重 - 载荷点変位曲線が図 7.6 ように得られた．図 7.6 より明らかであるが，ピーク荷重，またその後の軟化挙動や最終状態などは各不連続面の幅でほぼ完全に一致している．

以上より，物体全体の挙動を示す荷重 - 载荷点変位曲線が要素内部の不連続面の幅  $k$  に依存しないことが分かった．

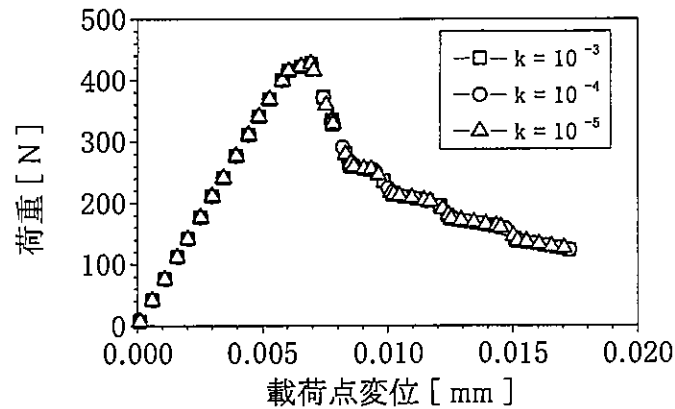


図 7.6 荷重 - 载荷点変位曲線における要素内部の不連続面の幅の比較

### 7.3 経路独立積分を用いたエネルギー解放率の精度検証による強不連続解析の考察

強不連続解析は前節で述べた要素分割不依存性や要素内部の不連続面の幅の不依存性などの特徴があり、ひずみの局所化やせん断帯などの数値解析に対し、工学上有意義な解析手法である。しかしながら、興味ある解析手法であるが、現在まで 1 次元の場合を除き、理論解が得られない事もあり、それらの解析手法の精度検討に関する研究は筆者の知る限り皆無である。興味ある解析手法であっても、精度が悪ければ、工学的に無意味である。

そこで、破壊力学の重要なパラメータの一つである破壊エネルギー、即ちエネルギー解放率を精度良く定量的に表しているかを検討する事によって、強不連続解析手法の妥当性の検討を行う。なお、このエネルギー解放率を求めるために、周知の  $J$  積分と、本論文で不連続面上に結合応力領域を含む場合に適用できる事を新たに証明した経路独立な  $E$  積分を使用する。

#### 7.3.1 不連続面先端が直進する場合

まず、上記の検証で行われた場合と同様に不連続面が直進する場合のエネルギー解放率の精度検証を行う。

##### 7.3.1.a 解析条件

7.1 節と同様に、境界値問題として、図 7.7 に示す正方板の引裂きを考える。平面ひずみを仮定し、 $L=10[\text{cm}]$  とする。有限要素解析においては、境界条件は強制変位で与えるものとし、応力集中を緩和するため、载荷点は左端上下に 4 点で与える。

また、解析で使用する材料定数は表 7.1 に示され、解析上のパラメータであり、Dirac のデルタ関数の近似に使用する不連続面の幅  $k$  を  $1.0 \times 10^{-5}[\text{cm}]$  とする。今回は要素分割不依存性の検証を目的とするので、不連続面進展は供試体左端中央より始まり、直進のみと仮定する。また、非線形の軟化曲線を捉えるため、载荷点に強制節点変位を与える増分型有限要素解析に対し、変位制御型 Newton-Raphson 法による収束計算を行う。

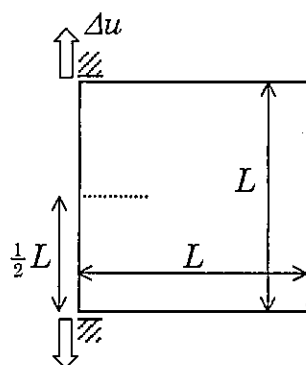


図 7.7 正方形板の引裂き

エネルギー解放率の精度検証により、不連続面解析手法の妥当性の検証を行う。その方法として、数値解析の入力値である破壊エネルギー  $G_f$  が、エネルギー解放率を求めるための経路独立積分である J 積分と E 積分によって精度良く求まるかによって解析手法の精度検証を行う。

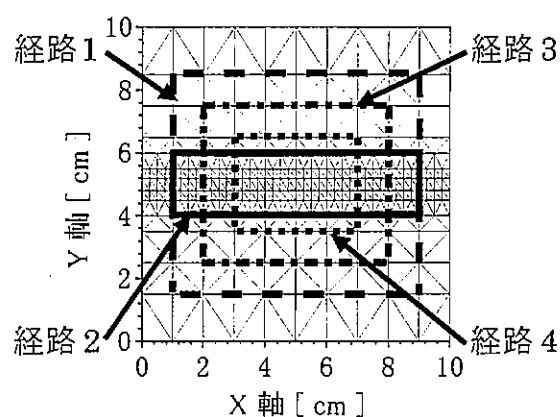


図 7.8 要素分割と積分経路



ここで、E 積分によりエネルギー解放率を求めるには、き裂長さ  $b$  の基本モデルとき裂長さが微小量  $\Delta b$  異なるき裂長さ  $b + \Delta b$  のき裂進展モデルの 2 つのモデルに対し、式(6.2.11)～式(6.2.13)を使用する。従って本論文においては、供試体に予め挿入される初期き裂が供試体左端中央から要素 32 個を横切るき裂長さ 4[cm]の基本モデルと要素 33 個を横切るき裂長さ 4.125[cm]のき裂進展モデルを用いて解析を行った。初期き裂は、要素内を横切る不連続面に予め結合応力が作用しない状態（損傷変数  $d=1$  の状態）を設定することにより表現している。

また、使用する有限要素分割は、7.1 節で最も滑らかな荷重－載荷点変位曲線が得られた要素分割 3 を使用する。J 積分と E 積分で使用する計 4 本の積分経路を図 7.8 に示し、供試体の外側から内側に向かって経路 1～4 とした。

### 7.3.1.b 解析結果と考察

図 7.9 は各モデルの荷重－載荷点変位曲線を示しており、ここで初期き裂無しとは 5.1 節の解析と同じものである。初期き裂を有する基本モデルやき裂進展モデルが低い耐荷力を示しながら、初期き裂無しの場合曲線に漸近していく傾向が見られる。基本モデルとき裂進展モデルが初期き裂無しと初めて一致する状態、即ち載荷点変位が約 0.0152[mm]の状態において E 積分値と J 積分値の比較を行う。またそれぞれのモデルに同じ載荷点変位を与えると、最終状態での荷重は一致しており、そして変形や不連続面の進展状況も同じであった。

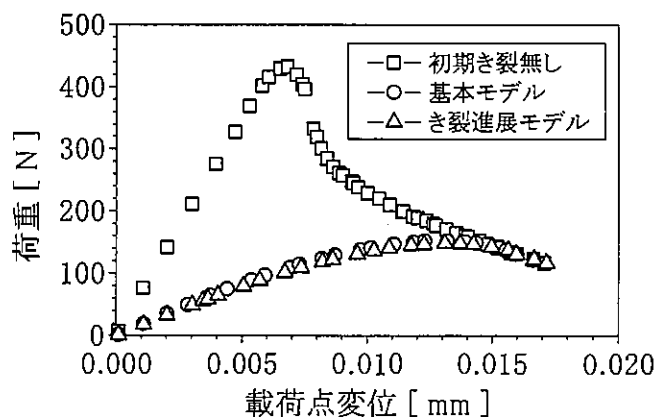


図 7.9 荷重－載荷点変位における各モデルの比較

J 積分値と E 積分値の精度並びに経路依存性を検討するため、載荷点変位が約 0.0152[mm]の状態における J 積分値と E 積分値の比較を行い、図 7.10 に示す。この図よ

り、E 積分値の経路独立性が十分に確認出来る。また E 積分値と与えられた破壊エネルギー  $G_f$  の相対誤差は約 0.5% と小さく、非常に精度良く破壊エネルギー即ちエネルギー解放率が求められている。このことから要素内に変位不連続面を持つ強不連続解析は非常に精度の良いものである事が分かる。また E 積分値に経路独立性がある事はその経路内の力のつりあい条件が満たされていることも示す。一方 J 積分値は誤差が大きく、経路独立性が失われている。この理由は、J 積分公式には、ひずみエネルギーの項が含まれ、経路上の応力ないしひずみを計算する必要がある。従って、要素辺に積分経路を設定した場合には、応力、ひずみを計算するのに何らかの面積補正のようなものが必要になり、結局 J 積分値の精度が落ちてしまう。一方 E 積分の方は、精度の良い節点変位と節点力のみでエネルギー解放率が計算出来るので、非常に精度の良いエネルギー解放率が得られる。また、たとえ要素内に経路を設定してもその応力、ひずみの精度が良くないことから当然 J 積分の精度は向上しない。

以上より、E 積分により破壊エネルギーが経路独立にかつ精度良く求められたことにより、不連続面の先端が直進する場合の強不連続解析の妥当性が検証され、強不連続解析の精度が良いものであることが立証された。

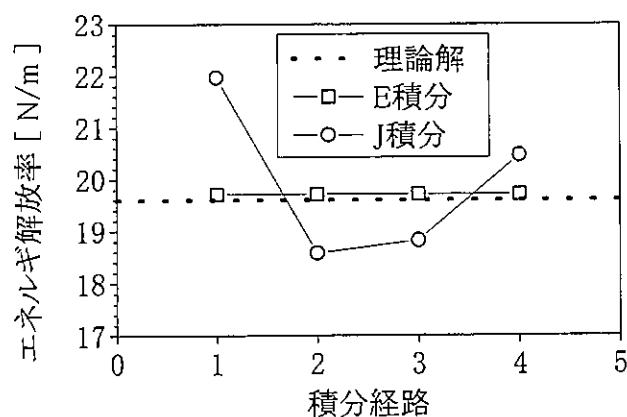


図 7.10 J 積分値と E 積分値の比較

### 7.3.2 不連続面先端が折れ曲がる場合

前節において、破壊力学の重要なパラメータの 1 つである破壊エネルギーに対し経路独立積分を用いた精度検証により、き裂前方に結合応力領域を有する不連続面において、不連続面が直進する場合の強不連続解析の妥当性検討を試み、強不連続解析が精度の良いものであることを実証した。その際、周知の J 積分と、不連続面内に結合応力領域が存在する場合に対して新たに誘導した E 積分を使用し、J 積分より E 積分の方が破壊エネルギーの精度検証に有用であることも確認した。

しかし前節は不連続面が直進する場合に限定されていた。そこで本節では、更に工学上重要かつより興味深い問題であり、実際のき裂進展において頻繁に生じる不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析を行い、そして破壊エネルギーの精度検証により、強不連続解析の妥当性の検討を試みる。そしてエネルギー解放率を求める際、周知の  $J$  積分公式と既往の研究報告④で使用したき裂前方に結合応力利領域が存在する場合の  $E$  積分公式により、不連続面が折れ曲がる場合の両式の有効性を検討し、 $J$  積分と  $E$  積分の比較検討を行い、各積分公式の有用性について考察する。

### 7.3.2.a 解析条件

境界条件として図 7.11 に示すような正方板の左上と左下をそれぞれ上下鉛直方向に強制変位を与える。その際、まず不連続面の直進を仮定し、その後左下の載荷点において強制変位の方角を左下 45 度の向きに変更し、不連続面の進展方向を最大引張り方向と仮定することで、不連続面の折れ曲がりを考察する。有限要素解析においては、応力集中を緩和するため載荷点は上下端とも 2 点とする。また、解析は平面ひずみを仮定し、 $L=9$  [cm]とした。非線形の軟化曲線を求めるため、変位制御型 Newton-Raphson 法を用いた収束計算を行った。

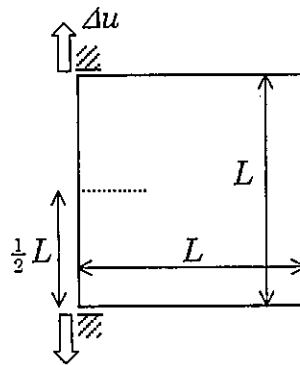


図 7.11 正方板の引裂き

表 7.2 材料定数

Young's modulus $E$	29.4	[GPa]
Poisson's ratio $\nu$	0.2	[-]
Fracture energy $G_f$	9.8	[N/m]
Tensile strength $\sigma_u$	2.94	[MPa]
Softening parameter $H$	$-1.5 \times 10^{-6}$	[-]

解析で使用する材料定数を表 7.2 に示す。また、解析上のパラメータとして有限要素内部を横切る不連続面の幅  $k$  を  $1.0 \times 10^{-5}$  [cm] とする。この  $k$  の値が解析結果に影響しないことは 7.2 節で確認されている。

次に解析モデルの有限要素分割と積分経路を図 7.12 に示す。要素は 3 角形定ひずみ要素を用いている。また要素総数 450、節点総数 256 であり、供試体の中心部を囲む太い実線で示された合計 6 本の積分経路をそれぞれ外側から経路 1, 2, ..., 6 とした。

本論文において、不連続面が供試体左端中央から要素 16 個を横切る基本モデル（き裂長さは要素 10 個分で 3[cm] である）と 1 要素分の折れ曲がりを含む要素 17 個を横切るき裂進展モデル（き裂長さは要素 11 個分で 3.3[cm] である）を用い、E 積分の解析を行った。従って、不連続面折れ曲がり部分は元の不連続面の長さに比較し、かなり小さいので、本解析での J 積分および E 積分の値は、不連続面折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率に近似的に等しいとも言える。強制変位  $\beta=0$  の時のき裂は、要素内を横切る不連続面に予め結合応力が作用しない状態（損傷変数  $d=1$  の状態）を設定している。

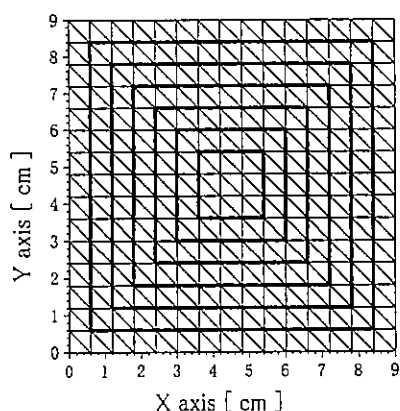


図 7.12 要素分割と積分経路

### 7.3.2.b 解析結果と考察

まず、左上の荷重点における荷重－荷重点変位曲線を図 7.13 に図示する。き裂長さが要素 10 個分の基本モデルに対し、き裂長さが要素 11 個分のき裂進展モデルが低い耐荷力を示しながら、やがて両者の曲線が一致することが分かる。

次に、最終変位状態での変形図を図 7.14 に示す。ここで、最終変位状態とは図 7.13 の変位が焼く 0.010[mm]の状態を意味する。微小な変形を見やすくするために変位を 1000 倍に拡大して図示している。正方形の変形が、不連続面近傍に局所化している様子が確認出来る。

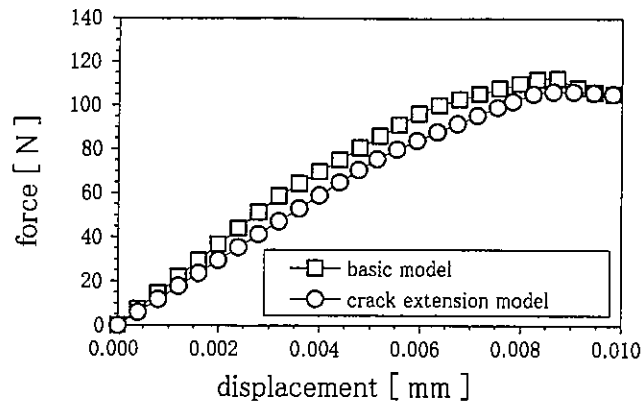


図 7.13 荷重－載荷点変位曲線における各モデルの比較

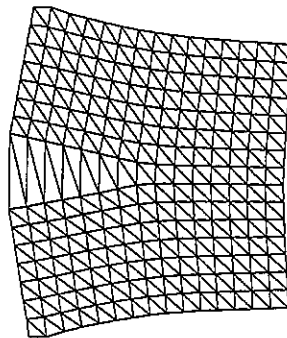


図 7.14 最終状態における変形図

また、最終変位状態でのき裂と結合応力領域の状態を基準状態の有限要素分割の中心部を拡大した図 7.15 に図示する。ここで、図の中心にある実線はき裂（結合応力がゼロである部分）を表しており、点線は結合応力領域を表している。先端  $a(t)$  の進展の後を追ってき裂先端  $b(t)$  が進展していることが分かる。ここで、積分経路 6 に関しては、経路が囲む領域がき裂先端  $b(t)$  を含んでおらず、J 積分や E 積分による値はゼロなので、経路 1～5 のみでエネルギー解放率による破壊エネルギーの精度検証を行う。

そして、J 積分と E 積分により求めたエネルギー解放率を図 7.16 に図示する。図 7.16 において図中の点線は表 7.4 の解析の入力値である破壊エネルギー  $G_f$  を示しており、前述のように、この破壊エネルギーが J 積分や E 積分により精度良く求まるかによって強不連続解析の精度検証を行うことが出来る。図 7.16 で明らかなように、図中の□印は点線と一致しておらず、経路ごとに値がばらついていることが分かる。また図中の○印と点線は良く一致し

ており、実際 E 積分値と破壊エネルギー  $G_f$  との相対誤差は各経路において約 0.25% 以下と非常に精度良い値が得られた。また横軸の経路番号による E 積分の値のばらつきも見られなかった、即ち E 積分の経路独立性が数値解析によって確認出来た。一方、不連続面折れ曲がり時の状態で公式(6.1.4)を用いて計算された J 積分の値は誤差が大きく、経路独立性が失われている。この理由は、J 積分公式には、ひずみエネルギーの項が含まれ、経路上の応力ないしひずみを計算する必要がある。従って、要素辺に積分経路を設定した場合には、応力、ひずみを計算するのに要素辺上の値を求める補間（面積補正等が使用される<sup>11)</sup>）が必要になり、結局 J 積分値の精度が落ちてしまう。一方 E 積分の方は、精度良く求めることが容易な節点変位と節点力のみでエネルギー解放率が計算出来るので、非常に精度の良いエネルギー解放率が得られることになる。

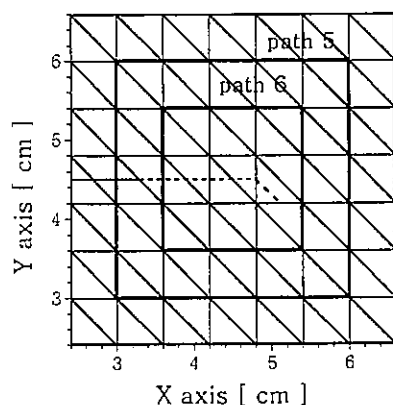
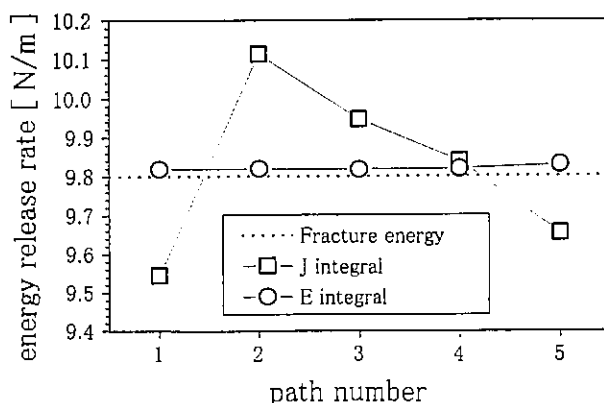


図 7.15 最終状態における不連続面先端の折れ曲がり

図 7.16 J 積分値と E 積分値の比較



以上より、E 積分により破壊エネルギーが経路独立にかつ精度良く求められたことにより、

不連続面の折れ曲がり瞬間後でも，強不連続解析の妥当性が検証され，強不連続解析の精度が良いものであることが立証された．

## 8. 結論

本論文は、変位不連続面を要素内部に組み込む強不連続有限要素解析に関して研究を行い、以下の知見を得た。

第 2 章では、本論文の定式化において必要となる固体力学の基礎を解説し、理論的基礎を得た。

第 3 章では、初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法を解説した。まず本来連続的な非線形方程式に対し、増分型反復法を用いて離散的に解を求める方法の基礎理論として、「 $f(x) = c$  型」と「 $f(x, c) = g(x)$  型」の 2 種類を解説し、それぞれの増分型反復法のアルゴリズムを得た。その際、反復法として一般的な Newton-Raphson 法を用いた。さらに有限要素法への適用を行い、初期境界値問題を解くための有限要素解析における「荷重制御境界条件」と「変位制御境界条件」に対する増分型反復法のアルゴリズムを得た。

第 4 章では、Jirásek の分類化を用いて、多くの研究者によって提案されている、要素内部に不連続を組み込んだ解析手法に対し、統一された枠組みにおける別種の技術として解説し、それらの共通の特徴や差異を指摘し、そしてその適用限界を見極めるための比較研究を行った。その際、運動学的拡張や、内部つりあい条件の種類に特に注意して、個々の定式化の差異を、最も簡単な有限要素である定ひずみ三角形要素の挙動を解析することによって解説した。結果として、これらの定式化には 3 つの主要な分類が存在し、それらはここで、SOS, KOS, SKON と呼ばれ、SOS 定式化は完全に開いたき裂の運動（幾何学的関係）を正確に反映出来ないが、それは自然な表面力連続条件を与え、一方 KOS 定式化は運動を正確に表現しているが、不連続線を横切る表面力の連続条件に不十分な関係を与える。一方、非対称となる SKON 定式化は、適切な運動と不連続面を横切る連続条件の両方に対し、良い結果を与えることが分かった。そして SKON 定式化は、要素接線剛性行列の対称性を消失してしまうが、極めて自然な表面力連続条件を与えることが、応力ロッキング効果（不連続面を横切る見かけの応力遷移）なしに破壊過程を正確に表現出来る能力があることが分かった。

第 5 章では、SKON 定式化に分類される手法の中で、Oliver により提案される強不連続解析の概略を説明した。その結果、物体の全ての位置で無限大の応力が生じないという応力の有界性の条件を考慮すると、変位不連続面内とそれ以外の部分の構成式が自然に得られることが分かった。材料の損傷によるエネルギーの散逸が、新しいき裂面が生じる際に必要なエネルギー、すなわち破壊エネルギーと一致することが分かった。次に強不連続有限要素解析の定式化を解説し、不連続変位場において、物体全体に渡って定義されている変位ジャンプ関数が不連続面が生じる要素内部のみに作用するように不連続変位場の修正を行った。この処理によって、通常の有限要素法と同様に変位境界条件を扱うことが可能になり、



従来の有限要素プログラムから強不連続解析を考慮した有限要素プログラムへの拡張が容易になることが分かった。そして支配方程式より、力のつりあい式と強不連続条件式からなる要素接線剛性方程式を得た。

第 6 章では、本論文の主目的である強不連続解析の精度検証の手法として、強不連続解析が材料定数として数値解析に用い、また破壊力学の重要なパラメータの 1 つである破壊エネルギー、即ちエネルギー解放率を精度良く定量的に表しているかを検討することを提案した。その際、このエネルギー解放率を求めるために、周知の  $J$  積分と、不連続面上に結合応力領域を含む場合に適用できる事を新たに証明した経路独立な  $E$  積分の定式化を行い、不連続面が直進する場合と折れ曲がる場合に関して、 $J$  積分と  $E$  積分のそれぞれの積分公式を得た。

第 7 章では、強不連続有限要素解析を行い、強不連続有限要素解析は、物体全体の挙動を表す荷重-載荷点変位曲線が要素分割に依存しないことを確認した。また、物体全体の挙動を表す荷重-載荷点変位曲線が数値解析の入力値である要素内部の不連続面の幅に依存しないことを確認した。そして、破壊力学の重要なパラメータの 1 つであり、Oliver の提案する強不連続有限要素解析において、数値解析の入力値である破壊エネルギーに対し、エネルギー解放率を求める経路独立積分を用いた破壊エネルギー精度検証により、き裂前方に結合応力領域を有する不連続面において、不連続面が直進する場合の強不連続解析の妥当性検討を試み、強不連続解析が、エネルギー解放率の意味において、精度の良いものであることを確認した。その際、 $J$  積分より  $E$  積分の方が破壊エネルギーの精度検証に有用であることも確認出来た。次に、不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析を行い、破壊エネルギーの精度検証により、エネルギー解放率の意味での強不連続解析の妥当性の検討を試み、 $J$  積分と  $E$  積分の比較検討を行い、不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析においても、エネルギー解放率の意味において強不連続解析は精度の良いものであること、さらに  $J$  積分より  $E$  積分の方が破壊エネルギーの精度検証に有用であることを確認した。

## 参考文献

### 2. 固体力学の基礎

- 1) 社団法人 土木学会：土木工学ハンドブック，第 6 編 固体力学，pp.215-254，技報堂出版，1989.
- 2) Chadwick, P. : Continuum Mechanics, George Allen and Unwin Ltd., 1976. (後藤学訳，連続体力学，ブレイン図書，1979.)
- 3) 田中喜久昭，長岐滋，井上達雄：弾性力学と有限要素法，大河出版，1995.
- 4) 久田俊明：非線形有限要素法のテンソル解析の基礎，丸善株式会社，1992.
- 5) 久田俊明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善株式会社，1995.
- 6) 井上達雄，小林昭一，福岡秀和，村上澄男，北川浩，富田佳宏：固体力学の基礎 日本材料学会編，日刊工業新聞社，1981.

### 3. 初期境界値問題を解くための有限要素解析における増分型反復法

- 1) 矢富盟祥：私的ノート．1999.
- 2) 田中忠次，鶴飼恵三，河邑眞，阪上最一，大津宏康：地盤の三次元弾塑性有限要素解析，丸善株式会社，1996.
- 3) O.C. ツィエンキーヴィッツ：マトリックス有限要素法 三訂版，培風館，1980.
- 4) Simo, J. C., Hughes, T. J. R. : Computational Inelasticity, springer, 1998.

### 4. 強不連続解析の基礎理論

- 1) Jirásek, M. : comparative study on finite elements with embedded discontinuities, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 188, 307-330, 2000.
- 2) 社団法人 日本コンクリート工学協会：破壊力学の応用研究委員会報告書，1993.
- 3) Simo, J. C., : On the variational foundations of assumed strain methods, Journal of applied mechanics, Vol.53, 51-54, 1986.
- 4) Ortiz M, Leroy Y, Needleman A., : A finite element method for localized failure analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.61, 189-214, 1987.
- 5) Hillerborg, A., : Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete, in Sih, G. C., Di Tomaso, A.. (eds), Fracture mechanics of concrete : Structural application and numerical calculation, pp.141-170, 1985.
- 6) 岡村弘之：線形破壊力学入門，培風館，1976.
- 7) Jirásek, M., Zimmermann, T., : Embedded crack model: I. Basic formulation, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.50, 1269-1290, 2001.
- 8) Jirásek, M., Zimmermann, T., : Embedded crack model: I. Basic formulation, Int. J.

- Numer. Meth. Engng., Vol.50, 1291-1305, 2001.
- 9) Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B. E., : A finite element with embedded localization zones, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 70, 59-89, 1988.
  - 10) Dvorkin, E. N., Cuitino, A. M., Gioia, G., : Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.30, 541-564, 1990.
  - 11) Klisinski, M., Runesson, K., Sture, S., : Finite element with inner softening band, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol.117, 575-587. 1991.
  - 12) Lotfi, H. R., Shing, P. B., : Embedded representation of fracture mechanics in concrete with mixed finite elements, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.38, 1307-1325, 1995
  - 13) Simo, J. C., Oliver, J., Armero, F., : An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids, *Computational Mech.*, Vol.12, 277-296, 1993.
  - 14) Armero, F., Garikipapati, K., : An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with numerical simulation of strain localization in solids, *Int. J. Solid Structures*, Vol.33, 2863-2885, 1996,
  - 15) Oliver, J., : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1 : Fundamentals, *Int. j. numer. methods eng.*, 39, 3575-3600 , 1996.
  - 16) Oliver, J., : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, *Int. j. numer. methods eng.*, 39, 3601-3623, 1996.
  - 17) Oliver, J., Cervera, M., Manzoli, O., : Strong discontinuities and continuum plasticity model : the strong discontinuity approach, *Int. J. Plasticity*, Vol.15, 319-351, 1999
  - 18) Larsson, R., Runesson, K., : Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.36, 2087-2105, 1993.
  - 19) Berend, A. H., Sluys, L. J., de Borst, R., : Discontinuous modeling mode-I failure, *Finite elements in engineering science*, hendsiks, Jongedijk, Rots, van Spanje (eds), 351-361, 1997
  - 20) Tano, R., Klisinski, M., Olofsson, T., : Stress locking in the inner softening band method : A study of the origin and how to reduce the effects, *Computational modeling of concrete structure*, de Borst, Bićanić, Mang, and Mesche (eds), 329-335,

1998.

- 21) Oliver, J., Simo, J. C., : Modeling strong discontinuities by means of strain softening constitutive eqations, Computer modeling of concrete structures, Mang, Bićanić, de Borst, (eds), Proceedings of EURO-C 1994 International Conference held in Innsburuck, Austria, 22nd-25th March, 1994.

#### 5. 強不連続解析の具体的な定式化

- 1) Oliver, J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1 : Fundamentals, Int. j. numer. methods eng., 39, 3575-3600 , 1996.
- 2) Oliver, J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, Int. j. numer. methods eng., 39, 3601-3623, 1996.

#### 6. 経路独立積分

- 1) Rice, J. R. : A path - independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol. 35, 376-386, 1968.
- 2) Eshelby, J. D. “The continuum theory of lattice defect, vol. III” , 79-144, Academic press. 1956.
- 3) 岡村弘之 : 線形破壊力学入門, 培風館, 1976.
- 4) Rice, J. R. : Fracture Vol. II, Academic press, 1968.
- 5) 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥 : 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究, 応用力学論文集, Vol. 3, 351-362, 2000.
- 6) 杉本環, 矢富盟祥, 鱈洋一 : 不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析の精度検証, 材料, 投稿中.
- 7) Yatom, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solid. Structure, Vol. 19, 183-187, 1983.

#### 7. 数値解析

- 1) 杉本環, 鱈洋一, 矢富盟祥 : 経路不変積分を用いた強不連続解析の精度検証に関する研究, 応用力学論文集, Vol. 3, 351-362, 2000.
- 2) 杉本環, 矢富盟祥, 鱈洋一 : 不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析の精度検証, 材料, 投稿中.

Hu-Washizu の変分原理 (式(4.2.2)参照) より

$$\int_V \delta \varepsilon \cdot \tilde{\sigma}(\varepsilon) dV + \delta \int_V \sigma \cdot (\partial u - \varepsilon) dV = \int_V \delta u \cdot \bar{b} dV + \int_{S_t} \delta u \cdot \bar{t} dS$$

上式左辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} \delta \int_V \sigma \cdot (\partial u - \varepsilon) dV &= \int_V \{ \delta \sigma \cdot (\partial u - \varepsilon) + \sigma \cdot (\partial \delta u - \delta \varepsilon) \} dV \\ &= \int_V \delta \sigma \cdot (\partial u - \varepsilon) dV + \int_V \sigma \cdot \partial \delta u dV - \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon dV \end{aligned}$$

となり, 上式右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} \int_V \sigma \cdot \partial \delta u dV &= \int_V \sigma \cdot \text{grad } \delta u dV \quad \because \partial = \text{grad} \\ &= \int_V \{ \text{div}(\sigma \delta u) - (\text{div } \sigma) \cdot \delta u \} dV \quad \because \text{div}(\sigma \delta u) = (\text{div } \sigma) \cdot \delta u + \sigma \cdot \text{grad } \delta u \\ &= \int_V \text{div}(\sigma \delta u) dV - \int_V (\text{div } \sigma) \cdot \delta u dV \end{aligned}$$

となり, 上式右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned} \int_V \text{div}(\sigma \delta u) dV &= \int_S (\sigma \delta u) \cdot \mathbf{n} dS \quad \because \text{divergence theorem} \quad \int_V \text{div } \mathbf{u} dV = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S \mathbf{n} \cdot (\sigma \delta u) dS \\ &= \int_S \delta u \cdot \sigma \mathbf{n} dS \quad \because \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A} \mathbf{a}, \sigma \in \text{Sym} \\ &= \int_{S_t} \delta u \cdot \sigma \mathbf{n} dS + \int_{S_u} \delta u \cdot \sigma \mathbf{n} dS \quad \because S = S_t \cup S_u, S_t \cap S_u = \emptyset \\ &= \int_{S_t} \delta u \cdot \sigma \mathbf{n} dS \quad \because \delta u = \mathbf{0} \text{ on } S_u \end{aligned}$$

となるので, 与式は,

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \varepsilon \cdot \tilde{\sigma}(\varepsilon) dV + \int_V \delta \sigma \cdot (\partial \mathbf{u} - \varepsilon) dV + \int_{S_i} \delta \mathbf{u} \cdot \sigma \mathbf{n} dS - \int_V (\operatorname{div} \sigma) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} dS \end{aligned}$$

となり、各変分量に関して整理すると、

$$\int_V \delta \varepsilon \cdot \{\tilde{\sigma}(\varepsilon) - \sigma\} dV + \int_V \delta \sigma \cdot (\partial \mathbf{u} - \varepsilon) dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\operatorname{div} \sigma + \bar{\mathbf{b}}) dV + \int_{S_i} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\mathbf{t}} - \sigma \mathbf{n}) dS$$

となる。上式が任意かつ互いに独立な  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \varepsilon$ ,  $\delta \sigma$  に対して成立するには、

$$\tilde{\sigma}(\varepsilon) - \sigma = \mathbf{0}, \quad \partial \mathbf{u} - \varepsilon = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \sigma + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{t}} - \sigma \mathbf{n} = \mathbf{0}$$

でなければならない。従って式(4.2.3)～式(4.2.6)が成立する。

式(4.2.2)より,

$$\int_V \delta \varepsilon^T \tilde{\sigma}(\varepsilon) dV + \int_V \delta \sigma^T (\partial u - \varepsilon) dV + \int_V \sigma^T (\partial \delta u - \delta \varepsilon) dV = \int_V \delta u^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_t} \delta u^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (\text{a})$$

となる. そして式(4.3.1)~(4.3.3)より,

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c$$

$$\varepsilon \approx \mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}$$

$$\sigma \approx \mathbf{S}\mathbf{s}$$

であり, また

$$\partial(\mathbf{N}\mathbf{d}) = \mathbf{B}\mathbf{d}$$

$$\partial(\mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) = \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c$$

である. 以上より式(a)左辺第1項は,

$$\begin{aligned} \int_V \delta \varepsilon^T \tilde{\sigma}(\varepsilon) dV &= \int_V (\mathbf{B}\delta \mathbf{d} + \mathbf{G}\delta \mathbf{e})^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV \\ &= \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV \end{aligned}$$

となり, 式(a)左辺第2項は,

$$\begin{aligned} \int_V \delta \sigma^T (\partial u - \varepsilon) dV &= \int_V (\mathbf{S}\delta \mathbf{s})^T \{\partial(\mathbf{N}\mathbf{d} + \mathbf{N}_c \mathbf{d}_c) - (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e})\} dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}^T (\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{B}\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{e}) dV \\ &= \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G}\mathbf{e}) dV \end{aligned}$$

となり, 式(a)左辺第3項は,

$$\begin{aligned}
 \int_V \sigma^T (\partial \delta u - \delta \varepsilon) dV &= \int_V (Ss)^T \{ \partial (N \delta d + N_c \delta d_c) - (B \delta d + G \delta e) \} dV \\
 &= \int_V (Ss)^T (B \delta d + B_c \delta d_c - B \delta d - G \delta e) dV \\
 &= \int_V (Ss)^T (B_c \delta d_c - G \delta e) dV \\
 &= \int_V (Ss)^T B_c \delta d_c dV - \int_V (Ss)^T G \delta e dV \\
 &= \int_V (B_c \delta d_c)^T Ss dV - \int_V (G \delta e)^T Ss dV \\
 &= \delta d_c^T \int_V B_c^T Ss dV - \delta e^T \int_V G^T Ss dV
 \end{aligned}$$

となり，式(a)右辺第1項は，

$$\begin{aligned}
 \int_V \delta u^T \bar{b} dV &= \int_V (N \delta d + N_c \delta d_c)^T \bar{b} dV \\
 &= \delta d^T \int_V N^T \bar{b} dV + \delta d_c^T \int_V N_c^T \bar{b} dV
 \end{aligned}$$

となり，式(a)右辺第2項は，

$$\begin{aligned}
 \int_{S_i} \delta u^T \bar{t} dS &= \int_{S_i} (N \delta d + N_c \delta d_c)^T \bar{t} dS \\
 &= \delta d^T \int_{S_i} N^T \bar{t} dS + \delta d_c^T \int_{S_i} N_c^T \bar{t} dS
 \end{aligned}$$

となる．従って式(a)は，

$$\begin{aligned}
 &\delta d^T \int_V B^T \tilde{\sigma} (Bd + Ge) dV + \delta e^T \int_V G^T \tilde{\sigma} (Bd + Ge) dV + \delta s^T \int_V S^T (B_c d_c - Ge) dV \\
 &+ \delta d_c^T \int_V B_c^T Ss dV - \delta e^T \int_V G^T Ss dV \\
 &= \delta d^T \int_V N^T \bar{b} dV + \delta d_c^T \int_V N_c^T \bar{b} dV + \delta d^T \int_{S_i} N^T \bar{t} dS + \delta d_c^T \int_{S_i} N_c^T \bar{t} dS
 \end{aligned}$$



となり, 上式を各変分量に関して整理すると,

$$\begin{aligned}
 & \delta \mathbf{d}^T \int_V \mathbf{B}^T \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{e}^T \int_V \mathbf{G}^T \{ \tilde{\sigma}(\mathbf{B}\mathbf{d} + \mathbf{G}\mathbf{e}) - \mathbf{S}\mathbf{s} \} dV \\
 & + \delta \mathbf{s}^T \int_V \mathbf{S}^T (\mathbf{B}_c \mathbf{d}_c - \mathbf{G}\mathbf{e}) dV + \delta \mathbf{d}_c^T \int_V \mathbf{B}_c^T \mathbf{S}\mathbf{s} dV \\
 & = \delta \mathbf{d}^T \left\{ \int_V \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS \right\} + \delta \mathbf{d}_c^T \left\{ \int_V \mathbf{N}_c^T \bar{\mathbf{b}} dV + \int_{S_i} \mathbf{N}_c^T \bar{\mathbf{t}} dS \right\} \\
 & = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{ext} + \delta \mathbf{d}_c^T \mathbf{f}_c
 \end{aligned}$$

となり, 式(4.3.4)が誘導出来る.